二段階 立地選定 問題

明 英 秀*

目 次

第1章 序 論

本 論文은 2段階의 流通構造(製品이 工場에서 倉庫를 거쳐 消費地에 到着하는 流通構造) 내에서, 供給能力에 제한이 없는 工場과 制限이 있는 倉庫의 立地選定을 동시에 다루는 문제를 고려대상으로 한다.

倉庫立地選定問題(WAREHOUSE LOCATION PROBLEM)는 過去로부터 많은 연구가 있어 왔으나 대부분 1단계 流通構造(供給處와 消費者만 存在하는 流通構造)에 局限되어 왔으며, 특히 工場 및 倉庫의 立地를 同時에 選定하는 問題는 극히 制限的으로 다루어져 왔다. 그러나 實際의 流通構造는 2단계의 形態를 취하는 경우가 많은데 2단계 流通構造의 경우에 1단계 流通構造에 있어서의 立地選定에 관한 研究結果를 適用하는 경우는 2단계 流通構造의 經濟的인 特性을 間接的으로 밖에 考慮할 수 없다. 특히 2단계 流通構造內에서 工場과 倉庫의 立地選定을 동시에 考

*本 研究所 研究員

處한 硏究는 KAUFMAN 등 〔8〕 이 工場, 倉庫 모두 供給能力에 制限이 없는 경우를 다룬것이 고작이다. 2단계 流通構造내의 倉庫의 最適立地選定에 대한 硏究는 D.H. MARKS〔14〕에 의해 처음 試圖되었다.

MARKS는 一般的 BRANCH AND BOUND기법을 利用하여 이 문제에 接近하였다. 2단계 流通構造內의 倉庫의 立地選定問題에 대한 그 밖의 接近方法은 다음과 같이 나눌 수 있다.

1. 一般的 混合整數計劃法의 利用;

D.G. ELSON 〔2〕은 一般的 混合整數計劃法의 관점에서 接近하였다. 一般的 混合整數計劃法의 接近方法은 模型을 設定하는 데에 融通性(FLEXIBILITY)을 줄 수 있으나 計算上의非效率性을 갖는 短點이 있다.

2. BENDERS 分割法 (BENDERS'DECOMPOSITION)의 利用;

L.B. ELLWEIN과 P.GRAY〔3〕, A.M. GEOFFRION 과 G.W. GRAVES 〔7〕은 BENDERS 분할법을 利用하여 이 問題에 接近하였다. 특히 後者의 경우는 多品種製品을 취급하는 倉庫의 立地選定 模型의 解를 效率的으로 구하고 있다.

3. 郡理論 (GROUP THEORY)의 利用;

J.L. KENNINGTON과 V.E. UNGER〔9〕 및 R.L. RARDIN과 V.E. UNGER〔13〕는 郡理論에 根據한 PENALTY를 利用하여 BRANCH AND BOUND 過程을 遂行하였다.

4. 一般的인 固定費發生 輸送問題 (FIXED-CHARGE TRANSPORTATION PROBLEM)의 解法의 利用;

M.MALECK-ZAVAREI와 I.T. FRISCH 〔11〕는 固定費發生(FIXED-CHARGE) TRANSSHIPMENT 문제를 固定費發生 輸送問題로 變換할 수 있음을 보이고, 一般的인 固定費發生 輸送問題의 解法을 利用할 수 있음을 밝혔으나 計算經驗(COMPUTATIONAL EXPERIENCE)을 提示하지는 않았다.

本 論文의 目的은 KAUFMAN 등〔8〕이 다루었던 2단계 流通構造內에서 工場과 倉庫 모두 供給能力에 制限이 없는 경우의 問題를 倉庫의 供給能力에 制限이 있는 問題로 擴張했을 때 最適의 解를 구할 수 있는 效率的인 解法을 提示하는 것이다. 이를 위하여 本 論文에서는,

(i) ELLWEIN과 GRAY〔3〕의 變換法 및 ERLENKOTTER〔4〕의 LEMMA를 利用하여,

(ii) KANFMAN [8] 및 AKINC 와 KHUMAWALA [1] 의 簡略化技法을 본 論文의 解法에 適用하였는데, 1단계 流通構造內에서만 使用할 수 있었던 AKINC 와 KHUMAWALA의 簡略化過程을 2段階 流通構造에 適用할 수 있게 하였다는 點에서 旣存의 2단계 流通構造內의 立地選定問題의 解法과는 根本的으로 다른 것이다.

第2章 模型의 設定

2.1 模型의 假定

本章의 目的은 2단계 流通構造의 總費用을 最少化하기 위하여 工場 및 倉庫의 設立候補地에 얼마나 많은 수의 工場 및 倉庫를 어떠한 位置에 設立할 것인가 하는 문제를 數理的 模型으로 定式化하는데 있다.

模型의 假定은 다음과 같다.

假定 1. 製品은 單一品目이거나 同質의 製品組合의 形態를 갖는다.

假定 2. 計劃期間은 單一計劃期間이다.

假定 3. 費用要素는 다음과 같이 分類할 수 있다.

i) C_{ij}^1 : 工場 i 에서 倉庫 j 로 製品 한 단위를 보내는데 드는 費用

ii) C_{jk}^2 : 倉庫 j 에서 需要地 k 에 製品 한 단위를 보내는데 드는 費用

iii) f_i : 工場 i 의 設立에 드는 費用

iv) g_j : 倉庫 j 의 設立에 드는 費用

假定 4. 工場을 設立하는 경우 生産能力에는 制限이 없다.

假定 5. 倉庫가 取扱할 수 있는 製品의 量에는 限界가 있다.

假定 6. 需要地의 需要量은 確定的이며 모두 滿足되어야 한다.

2.2 模型의 定式化

2.1에서 記述한 假定下에서 總費用을 最少化하기 위한 問題를 定式化하여야 한다. 이 論文에서 取扱할 문제를 表示하기에 앞서 다음과 같이 기호를 定義한다.

A ; 工場候補地의 集合

B ; 倉庫候補地의 集合

C ; 需要地의 集合

X_{ijk} ; 工場 i 에서 倉庫 j 를 거쳐 需要地 k 에 供給되는 製品의 量

C_{ij}^1 ; 工場 i 에서 倉庫 j 에 1單位 보내는데 드는 費用

C_{jk}^2 ; 倉庫 j 에서 需要地 k 에 1單位 보내는데 드는 費用

f_i ; 工場 i 의 設立에 드는 費用

g_j ; 倉庫 j 의 設立에 드는 費用

W_j ; 倉庫 j 의 製品取扱能力

D_k ; 需要地 k 의 需要量

$$Y_i = \begin{cases} 1 ; & \text{工場 } i \text{ 가 開設되는 경우} \\ 0 ; & \text{工場 } i \text{ 가 開設되지 않는 경우} \end{cases}$$

$$Z_j = \begin{cases} 1 ; & \text{倉庫 } j \text{ 가 開設되는 경우} \\ 0 ; & \text{倉庫 } j \text{ 가 開設되지 않는 경우} \end{cases}$$

M ; 매우 큰 수

本 論文에서 다루는 문제는 위의 記號를 利用하여 다음과 같이 定義되며 이를 문제(P) 라고 稱한다.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i\in A}\sum_{j\in B}\sum_{k\in C}(C_{ij}^1+C_{jk}^2)\,\chi_{ijk}+\sum_{i\in A} f_iY_i+\sum_{j\in B} g_jZ_j \tag{1}$$

$$\text{Subject} \quad \sum_{j\in B}\sum_{k\in C}X_{ijk} \leq Y_iM, \quad i\in A \tag{2}$$

$$\text{(P)} \quad \sum_{i\in A}\sum_{k\in C} X_{ijk} \leq W_jZ_j, \quad j\in B \tag{3}$$

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} X_{ijk} = D_k, \quad k\in C \tag{4}$$

$$Y_i, Z_j \in \{0, 1\}, X_{ijk} \geq 0, \quad \text{for all } i, j, k \tag{5}$$

目的함수(1) 은 工場과 倉庫의 設立(Y_i Z_j 가 1의 값을 갖는 경우)에 드는 費用과 需要를 만족시키기 위해 工場에서 倉庫를 거쳐 각 需要地에 輸送하는 데 드는 費用의 合을 表示한다. 條件式(2)는 i 에 工場이 設立될 때에 한해 制約없이 供給이 可能함을 表示하며 조건식(3)은 j 에 倉庫가 設立될 때에 한해 倉庫의 供給上限線까지 製品이 通過할 수 있음을 보여주고, 조건식(4)는 需要地의 需要는 滿足되어야 함을 보여주고 있다.

따라서 本 問題는 주어진 倉庫의 供給能力制約下에 각 需要地의 需要를 만족하고, 工場 및 倉庫를 設置하는 固定費와 製品輸送費를 最少로 하는 工場 및 倉庫의 設置(Y_i, Z_j)와 이에 따른 輸送經路(χ_{ijk})를 決定하는 것이다.

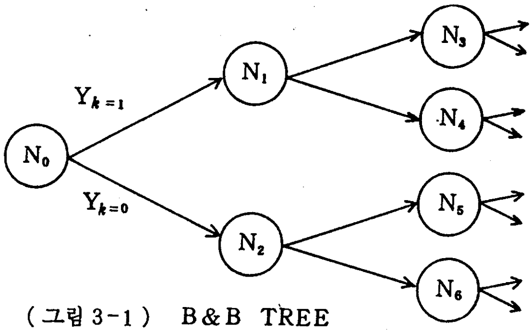
第 3 章 BRANCH AND BOUND 解法

위의 問題의 解法은 基本的으로 B & B (BRANCH AND BOUND) 解法을 利用한다. B&B 技法의 基本概念은 어떤 문제를 最適化시키는 데 있어 그 문제의 實行可能領域 (Feasible Region)을 分割하여 最適解가 나올 수 있는 "可能性"이 가장 큰 領域은 再次 分割하고, 最適解가 나올 수 없는 領域은 考慮의 對象에서 除外시키는 過程을 反復하여 最適解를 구하는 것이다.

第2章에서 設定한 模型P에 이 方法을 適用시켜가면 다음과 같다.[1]

模型P에서 制約條件式 $Y_i \in \{0,1\}$ ($i \in A$)를 $0 \leq Y_i \leq 1$, ($i \in A$)의 制約條件式으로 대체하여 만든 선형계획법 (LINEAR PROGRAMMING)의 解를 풀어서 目的함수의 最適値의 下限 $\underline{Z}_0$를 얻을 수 있다. 만약 모든 Y_i ($i \in A$)의 값이 0 또는 1이면 이미 模型P의 解를 求한 것이 된다. 만약 어떤 Y_K ($k \in A$) 의 값이 分數이면 우선 $Y_K=1$이라고 놓고 목적함수치의 下限 $\underline{Z}_1$을 구하고, 그 후 $Y_K=0$ 이라고 놓고 목적함수치의 또 다른 下限 $\underline{Z}_2$ 를 구한다. 이때 $\underline{Z}=\mathrm{Min}(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2)$가 P의 목적함수치의 새로운 下限이 된다.

이제까지의 過程을 Tree의 形態로 나타내면, 그림 3-1에서 보는 바와 같이 처음 NODE N_0로부터 (N_0, $Y_K=1$)인 NODE N_1과 (N_0, $Y_k=0$)인 NODE N_2가 형성되었다. 이때 NODE N_0를 NODE N_1과 NODE N_2의 先行NODE (PRECEDING NODE)라 하고 NODE N_1과 NODE N_2를 NODE N_0의 後續 NODE (SUCCEEDING NODE) 라고 한다.



(그림 3-1) B&B TREE

註) Z_j와 Y_i 전체를 같은 方式으로 適用시켜야 되나, 說明의 便宜를 위해 Y_i의 경우만으로 說明하였다.

이제 새로운 下限 $\underline{Z}$로부터 $Y_r \notin \{0,1\}$ 인 Y_r을 처음에는 $Y_r = 1$, 다음에는 $Y_r = 0$ (이러한 과정을 BRANCHING이라고 한다.)으로 고정시켜 목적함수치의 下限 $\underline{Z}_3$, $\underline{Z}_4$를 구한다. 여기서 다시 새로운 下限 $\underline{Z}=\text{Min}(\underline{Z}_3, \underline{Z}_4, \underline{Z})$를 구하고 같은 과정을 反復해 간다. 이러한 과정에서 形成되는 TREE를 B&B TREE라고 한다.

B&B TREE의 各 NODE는 원래의 문제P에 몇개의 Y_i ($i \in A$)의 값을 0 또는 1로 固定시켜 놓은 문제를 의미한다. 원래의 문제P에 몇개의 Y_i ($i \in A$)의 값을 0 또는 1로 固定시킨 問題를 候補問題(CANDIDATE PROBLEM)라고 한다. 以後의 內容에서는 NODE와 候補問題를 같은 의미로 使用한다.

候補問題의 目的함수값의 상한은 원래 問題P의 목적함수치의 상한이 된다. $\overline{Z}$를 현재까지 구한 候補問題의 目的함수값 上限의 最少값이라고 하자. $\overline{Z}$는 P의 目的함수값의 上限이 된다. 만약 NODE i가 새로 形成되었을 때, 즉 候補問題 i가 새로 形成되었을 때 그 候補問題의 目的함수값의 上限 $\overline{Z}_i$가 $\overline{Z}$보다 작으면 上限 $\overline{Z}$를 $\overline{Z}_i$로 改善시킨다. 만약 어떤 NODE에서 모든 Y_i ($i \in A$)의 값이 0 또는 1이면, 이러한 NODE를 終結NODE (TERMINAL NODE)라고 하고, 그렇지 않은 NODE를 非終結 NODE (NON-TERMINAL NODE)라고 한다.

B&B過程은 위와 같은 方法으로 각 단계에서 P의 목적함수치의 上限과 下限을 새로이 設定하여 가는데 이때 現在의 $\overline{Z}$보다 작은 목적함수치의 下限을 갖는 非終結 NODE가 없을 때 B&B의 過程은 끝나게 되며 $\overline{Z}$는 P의 最適値가 된다.

本 硏究의 B&B 解法上에서 풀게 되는 각 候補問題(C.P)는 원래의 문제(P)에서 Y_i, Z_j에 0, 1의 값을 割當한 形態가 된다. 便宜를 위해 $Y_i(Z_j)$의 값이 0 (閉鎖), 1 (開設), 값을 갖지 않는 경우 (未決定)에 따라 다음과 같이 index의 集合을 定義한다.

$$K_0^I = \{i \mid Y_i = 0\} \qquad K_0^J = \{j \mid Z_j = 0\}$$

$$K_1^I = \{i \mid Y_i = 1\} \qquad K_1^J = \{j \mid Z_j = 1\}$$

$$K_2^I = A - (K_0^I \cup K_1^I) \qquad K_2^J = B - (K_0^J \cup K_1^J)$$

B&B 解法에 의해 形成되는 B&B TREE의 첫번째 NODE는 $K_0^I = K_1^I = K_0^J = K_1^J = \phi$ 이고 $K_2^I = A$, $K_2^J = B$인 候補問題가 된다. 각 NODE에서 Y_i를 選擇, 0, 1의 값을 Branching 하는 과정에서 $Y_i = 0$ (또는 $Y_i = 1$)인 後續 NODE에서 원문제에 대한 最適解가 없음을 알 수 있으면 $Y_i = 1$ (또는 $Y_i = 0$)인 後續 NODE만 考慮해도 되므로 B&B TREE의 크기와 계산을 크게 줄일 수 있으며 이를 簡略化過程이라고 한다. (Z_j의 경우도 마찬가지).

이러한 簡略化過程을 위해서 각 候補問題의 下限(lower bound)이 필요하게 된다.

3.1 원문제(P)의 性格

원래의 問題(P)에서 工場및 倉庫의 設置가 固定된 경우를 假定하면 變動費(輸送費) 部分은 다음과 같은 Transshipment 문제로 表示할 수 있으며,

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{i\in A}\sum_{j\in B}\sum_{k\in C} (C_{ij}^{1}+C_{jk}^{2})\, X_{ijk} \\
\text{Subject to} \quad & \sum_{i\in A}\sum_{k\in C} X_{ijk} \leq W_j, \quad j\in B \\
& \sum_{i\in A}\sum_{j\in B} X_{ijk} = D_k, \quad k\in C \\
& X_{ijk} \geq 0 \qquad , \text{ for all } i,j,k
\end{aligned}
$$

Ellwein 〔3〕에 의하면 위의 문제는 다음과 같은 輸送問題 T(A,B)와 同値가 된다.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{j\in B}\sum_{k\in C} C_{jk} X_{jk} \\
\text{Subject to} \quad & \sum_{k\in C} X_{jk} \leq W_j, \quad j\in B \\
T(A,B) \qquad\quad & \sum_{j\in B} X_{jk} = D_k, \quad k\in C \\
& X_{jk} \geq 0 \qquad , \text{ for all } j,k. \\
& \left(C_{jk} = C_{jk}^{2} + \min_{i\in A} C_{ij}^{1} \right)
\end{aligned}
$$

이 論文에서는 위의 變換된 輸送問題를 利用하여 簡略化過程에 利用될 基準을 導出하고자 한다. 이에 앞서 다음의 몇가지 기호를 定義하고, 1단계 流通問題의 簡略化過程에 使用된 定理들을 擴張한다. 위의 變換된 輸送問題에서 알 수 있듯이 工場의 開設與否(集合A)는 C_{jk}에 영향을 미침을 알 수 있다. 따라서 工場 및 倉庫의 集合이 A_1, B_1 ($A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$)으로 주어졌을 때 變換된 輸送問題를 $T(A_1, B_1)$라 하고 目的 함수값을 $V(A_1, B_1)$로 表示한다.

다음으로 $\hat{j}$를 이용 원래의 $j\in B$의 費用計數 C_{jk}가 工場의 開設與否와 關係없이 最少의 費用計數로 變換된 形態의 倉庫를 表示하기로 한다.

$$C_{\hat{j}k} = C_{jk}^{2} + \min_{i\in A} C_{ij}^{1}, \quad \forall k$$

例로서 $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, 일 때 $r\in B-B_1$에 대해 $T(A_1, B_1 \cup \{\hat{r}\})$는 다음과 같은 輸送問題를 表示한다.

$$T(A_1, B_1 \cup \{\hat{r}\}) \quad \begin{aligned} &\text{Minimize} \sum_{j \in B_1 \cup \{r\}} \sum_{k \in C} C_{jk} X_{jk} \\ &\text{Subject to} \sum_{K \in C} X_{jk} \leq W_j \ , \ J \in B_1 \cup \{\hat{r}\} \\ &\sum_{j \in B_1 \cup \{r\}} X_{jk} = D_k \ , \ k \in C \\ &X_{jk} \geq 0 \ , \ j \in B_1 \cup \{r\} \ , \ k \in C \end{aligned}$$

$$C_{jk} = \begin{cases} C_{jk}^2 + \min_{i \in A_1} C_{ij}^1 \ , & j \in B_1 \ , \ k \in C \\ C_{rk}^2 + \min_{i \in A} C_{ij}^1 \ , & j = r \ , \ k \in C \end{cases}$$

T(A,B)를 雙對問題로 表示하면 다음과 같이 된다. $U_j(A,B)$, $V_k(A,B)$는 T(A,B)의 最適雙對變數(Optimal dual variable)를 표시한다.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad -\sum_{j \in B} W_j U_j(A,B) + \sum_{k \in C} D_k V_k(A,B) \\ &\text{Subject to} \quad V_k(A,B) - U_j(A,B) \leq C_{jk} \quad \forall (j,k) \\ &\qquad\qquad U_j(A,B) \geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

雙對問題의 最適雙對變數 $U_j(A,B)$, $V_K(A,B)$는 A가 固定되어 있을 때 B의 變化에 따라 獨特한 形態로 變化한다. ErlenKotter〔4〕는 이 性質을 다음과 같은 Lemma로 提示하였다.

Lemma 1 (Erlenkotter 의 lemma 2, 3〔4〕)

$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$, 이고 $U_j(A,B)$, $V_k(A,B)$를 T(A,B)의 最適雙對變數라고 할 때 다음이 成立한다.

$U_j(A,B_1) \geq U_j(A,B_2)$, $j \in B_2$

$V_k(A,B_1) \geq V_k(A,B_2)$, $k \in C$

但, $T(A,B_1)$은 $j \in B_2 - B_1$에 該當하는 倉庫 j의 Capacity가 0인 것으로 假定하여 $j \in B_2 - B_1$에 대해 $U_j(A,B_1)$을 표시한다.

위의 lemma를 이용 Erlenkotter는 1단계 流通問題의 簡略化過程에 效率的으로 쓰인 다음과 같은 lemma를 提示하였다.

Lemma 2 (Erlenkotter의 lemma 2.5[4])

$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$이고 $T(A, B_1)$이 實行可能일 때 $r \in B - B_2$에 대하여 다음이 成立한다.

$$V[A, B_1] - V[A, B_1 \cup \{r\}] \geq V[A, B_2] - V[A, B_2 \cup \{r\}]$$

위의 定理는 集合A(工場의 集合)가 固定된 경우에만 適用이 可能하다. 그러나 本 論文의 考慮對象이 되는 문제는 工場과 倉庫의 立地를 동시에 選定하므로 다음과 같은 擴張된 lemma가 필요하다.

Lemma 3

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$, 이고 $T(A_1, B)$가 實行可能일 때 다음이 成立한다.

$$U_j(A_1, B) \geq U_j(A_2, B) \qquad \forall\ j \in B - J^+$$

$$V_k(A_1, B) \geq V_k(A_2, B) \qquad \forall\ k \in C$$

Where $J^+ = \{ j \mid \min_{i \in A_1} C_{ij}^1 - \min_{i \in A_2} C_{ij}^1 > 0,\ \ j \in B \}$

(증명) 附錄參照

Lemma 4

$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ 이고 $T(A_1, B_1)$이 實行可能일 때, $r \in B - B_2$에 대하여 다음이 成立한다.

$$V(A_1, B_1) - V(A_1, B_1 \cup \{\hat{r}\})$$

$$\geq V(A_2, B_2) - V(A_2, B_2 \cup \{r\})$$

(증명) 附錄參照

3.2 簡略化 過程 I

$$\triangle_{ij} = \min_{k \in K_1^{\,I}} \{\max(C_{kj} - C_{ij},\ 0)\} \text{ 이고,}$$

$$\Omega_i^P = \max_{j \in K_1^J \cup K_2^J} \{ \sum_j \triangle_{ij} W_j \mid \sum_j W_j \leq \sum_{k \in C} D_k \}$$

$\Omega_j^W = V(K_1^I, K_1^J) - V(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\})$ 라 하면,

i) $i \in K_2^I$ 에 대하여 $\Omega_i^P < f_i$ 이면 工場 i 는 永久閉鎖($Y_i=0$) 한다.
ii) $j \in K_2^J$ 에 대해 $\Omega_j^W < g_j$ 이면 倉庫 j 는 永久閉鎖($Z_j=0$) 한다.

簡略化基準 i) 은 Kaufman 등 〔8〕의 工場閉鎖基準과 同一하며, 基準 ii)는 K_1^I, K_1^J 가 後續 node에서 계속 增加하므로 lemma 4에 의해 Ω_j^W는 倉庫 j 의 開設로 인한 變動費 減少分의 上限線이 되며 Akinc와 Khumawala가 사용한 Ω검사를 擴張한 形態가 된다.[1)]

3.3 목적함수값의 上限과 下限

3.3.1 목적함수의 下限

어떤 非終結 Node에서의 候補問題는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\text{minimize} \quad Z = \sum_{i \in K_1^I} f_i + \sum_{j \in K_1^J} g_j + \sum_{i \in K_2^I} f_i Y_i + \sum_{\in K_2^J} g_j Z_j + \sum_{i \in K_1^I \cup K_2^I} \sum_{j \in K_1^J \cup K_2^J} \sum_{k \in C} (C_{ij}^1 + C_{jk}^2) X_{ijk}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j \in K_1^J \cup K_2^J} \sum_{k \in C} X_{ijk} \leq Y_i M, \quad i \in K_1^I \cup K_2^I$$

$$\sum_{i \in K_1^I \cup K_2^I} \sum_{j \in K_1^J \cup K_2^J} X_{ijk} \leq W_j Z_j, \quad j \in K_1^J \cup K_2^J$$

$$\sum_{i \in K_1^I \cup K_2^I} \sum_{j \in K_1^J \cup K_2^J} X_{ijk} = D_k, \quad k \in C$$

$$X_{ijk} \geq 0, \quad i \in K_1^I \cup K_2^I, \quad j \in K_1^J \cup K_2^J, \quad k \in C$$

$$Y_i, Z_j \in \{0, 1\} \quad i \in K_2^I, \quad j \in K_2^J$$

1) A Kin 와 Khumawala는 Ω검사에서 直接 輸送問題를 풀지 않고 Lagrangean 緩和式을 利用하였다. 여기서도 같은 方法으로 Ω_j^W 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\Omega_j^W = V[K_1^I K_1^J] - L(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\})$$
$$= \max \left\{ \sum_k W_{\hat{j}k} X_{\hat{j}k} \;\middle|\; \sum_k X_{\hat{j}k} \leq W_{\hat{j}} \right\}$$
$$0 \leq X_{\hat{j}k} \leq D_k$$
$$\text{Where } W_{\hat{j}k} = V_k(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\}) - C_{\hat{j}k}$$

이러한 候補問題의 Y_i , Z_j의 整數條件을 緩和하면 목적함수값의 下限을 얻을 수 있으며 下限의 값은 CP의 식을 一部 變型한 CP′의 目的함수값과 같다. Y_i 의 整數條件을 緩和할 때 M의 값을 工場 i 가 後續 Node 에서 供給할 수 있는 最大値로 變換시키면 效果的인 下限을 구할 수 있으므로 m_i 를 다음과 같이 定義한다.

$$m_i = \min\left(\sum_{j\in J^+} W_j \ , \sum_{k\in C} D_k \right), \quad i \in K_2{}^I$$

$$\text{Where} \quad J^+ = \{ J \mid \min_{k\in K_1{}^J} \ C_{kj} - C_{ij} > 0 \}$$

이를 이용 CP의 下限을 提供하는 CP′를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\text{minimize} \quad \sum_{i\in K_1{}^I} f_i + \sum_{j\in K_1{}^J} g_j + \sum_{i\in K_1{}^I \cup K_2{}^I} \ \sum_{j\in K_1{}^J \cup K_2{}^J} \ \sum_{k\in C} (\hat{C}_{ij} + C^2_{jk}) X_{ijk}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i\in K_1{}^I \cup K_2{}^I} \ \sum_{j\in K_1{}^J \cup K_2{}^J} X_{ijk} \le W_j, \quad j\in K_1{}^J \cup K_2{}^J$$

$$(\mathrm{CP}') \qquad \sum_{i\in K_1{}^I \cup K_2{}^I} \ \sum_{j\in K_1{}^J \cup K_2{}^J} X_{ijk} = D_k, \quad k \in C$$

$$X_{ijk} \ge 0 \qquad i\in K_1{}^I \cup K_2{}^J, \ J\in K_1{}^J \cup K_2{}^J, \ k\in C$$

$$\text{where} \quad \hat{C}_{ij} = \begin{cases} C_{ij}^1 + \dfrac{f_i}{m_i} + \dfrac{g_j}{W_j}, & i\in K_2{}^I, \ j\in K_2{}^J \\ C_{ij}^1 + \dfrac{f_i}{m_i}, & i\in K_2{}^I, \ j\in K_1{}^J \\ C_{ij}^1 + \dfrac{g_j}{W_j}, & i\in K_1{}^I, \ j\in K_2{}^J \\ C_{ij}^1, & i\in K_1{}^I, \ j\in K_1{}^J \end{cases}$$

이와 같이 해서 얻은 下限을 LB_1이라고 하자. 또 다른 下限은 簡略化過程에서 追加計算없이 구할 수 있다. 工場이나 倉庫를 同時에 開設하면서 생기는 總費用의 減少分이 각각 開設에 따르는 費用減少分의 合보다 작음을 이용하여 다음과 같은 下限 LB_2를 구할 수 있다.

$$LB_2 = \sum_{i\in K_1{}^I} f_i + \sum_{j\in K_1{}^J} g_j + V[K_1{}^I, K_1{}^J] - \sum_{i\in K_2{}^I} (\Omega_i{}^P - f_i) - \sum_{j\in K_2{}^J} (\Omega_j{}^W - g_j)$$

$\Omega_i^P - f_i$ 와 $\Omega_j^W - g_j$ 는 簡略化過程을 거쳤으므로 양수임을 알 수 있다.

이상에서 구한 LB_1, LB_2를 利用, 각 Node 에서의 下限 LB를 구한다.

$$LB = \max(LB_1, LB_2)$$

이 때 $LB > \bar{Z}$ 인 Node 는 더 이상 考慮하지 않아도 된다. ($\bar{Z}$는 現在까지 구한 候補問題中 가장 좋은 解를 의미).

3.3.2 目的함수의 上限

각 Node 에서 候補問題의 上限은 K_2^I, K_2^J 의 Y_i, Z_j 값에 適當히 0, 1 의 값을 割當한 形態로서 구할 수 있으나, 追加計算없이 다음과 같은 方法으로 두개의 上限 (UB_1, UB_2) 를 구할 수 있다.

$$UB_1 = V[K_1^I, K_1^J] + \sum_{i \in K_1^I} f_i + \sum_{i \in K_1^J} g_j$$

UB_2 는 LB_1을 구하는 과정에서 얻을 수 있다. 즉, 緩和된 Y_i 와 Z_j 의 값이 0 보다 큰수를 가지면 1 의 값을 주고 0 의 값을 가질 때는 그대로 0 값을 줌으로써 上限을 얻을 수 있다.

$$UB_2 = \sum_{i \in K_1^I} f_i + \sum_{j \in K_1^J} g_j + \sum_{i \in K_1^I \cup K_2^I} \sum_{j \in K_1^J \cup K_2^J} \sum_{k \in C} (C^1_{ij} + C^2_{jk}) X_{ijk} + \sum_{i \in K_2^I} f_i \hat{Y}_i + \sum_{j \in K_2^J} g_j \hat{Z}_j$$

$$\text{where } \hat{Y}_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{j \in K_1^J \cup K_2^J} \sum_{k \in C} X_{ijk} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\hat{Z}_j = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{i \in K_1^I \cup K_2^I} \sum_{k \in C} X_{ijk} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

UB_1은 $T[K_1^I, K_2^J]$이 實行不能일 경우 구할 수 없으므로 이 경우에는 UB_2 가 有效하게 쓰인다. 각 Node 의 상한 UB를 min (UB_1, UB_2) 로 구한다.

3.4 簡略化 過程 II

앞서 구한 LB_2 와 Ω_i^P, Ω_j^W 를 이용, 다음과 같은 두번째 簡略化過程을 導出할 수 있다.

簡略化過程 Ⅱ

i) $i \in K_2{}^I$ 에 대해 $LB_2 + (\Omega_i{}^P - f_i) > \bar{Z}$ 이면 $Y_i = 1$ (永久開設) 로 정한다.

ii) $j \in K_2{}^J$ 에 대해 $LB_2 + (\Omega_j{}^W - g_j) > \bar{Z}$ 이면 $Z_j = 1$ (永久開設) 로 정한다.

第 4 章 解 法 節 次

本 章에서는 앞에서 구해진 簡略化過程 및 上限과 下限을 이용하여 문제 (P)에 대한 效率的인 B & B過程을 導出한다. 이를 위하여 Branching 方法 및 NODE 選擇方法을 정하고 B & B過程의 흐름도 (FLOW CHART) 를 提示하고자 한다.

4.1 Branching 및 NODE 選擇方法

Branching 方法이란 $K_2{}^I, K_2{}^J$에 속한 未決定變數中 어떤 變數에 0과 1의 값을 주어 두개의 NODE로 Branching을 할 것인가를 決定하는 規則이다. 따라서 效率的 Branching 方法을 정함으로써 最適解를 구하는데 드는 總時間을 줄일 수 있다. 本 硏究에서 導出한 簡略化過程은 $T(K_1{}^I, K_1{}^J)$ 가 實行可能일 때만 사용할 수 있다. 따라서 Branching의 方法도 $T(K_1{}^I, K_1{}^J)$ 의 實行可能 與否에 따라 다음과 같이 분리해서 考案되었다.

【 Branching 方法 】

(i) $T(K_1{}^I, K_1{}^J)$ 가 實行不能이면 $W_K = \underset{j \in K_2{}^J}{\text{Max}} W_j$ 인 Z_K를 Branching한다. $T(K_1{}^I, K_1{}^J)$ 의 實行可能 與否는 $K_1{}^I \neq \phi$인 경우를 제외하고는 $K_1{}^J$ 에 달려있으므로 여기서는 W_j 의 경우만을 考慮하였다.

(ii) $T(K_1{}^I, K_1{}^J)$ 가 實行可能이면. $P_K = \underset{i \in K_2{}^I}{\text{Max}} \Omega_i{}^P$, $W_L = \underset{j \in K_2{}^J}{\text{Max}} \Omega_j{}^W$를 비교, $P_K \geq W_L$이면, Y_K를, $P_K \leq W_L$ 이면 Z_L을 Branching 한다.

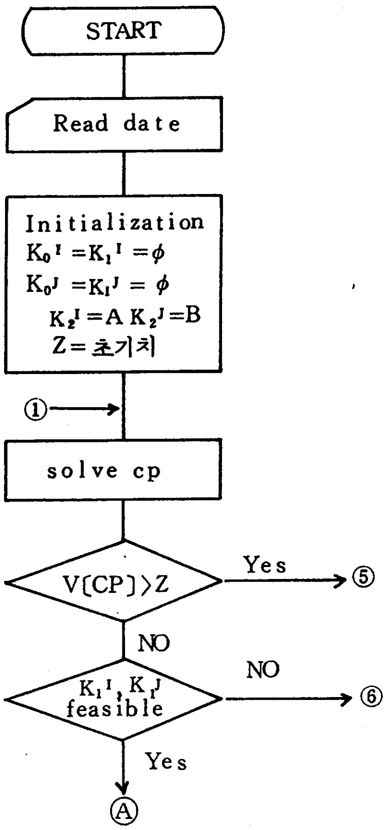
NODE 選擇方法이란 B & B Tree 상에서 다음에 검토될 NODE (또는 候補問題) 를 選擇하는 基準이다. NODE 選擇方法이 다르면 B & B Tree의 形態가 달라지게 된다. NODE 選擇方法에는 크게 後入先出法과 重要度에 의한 우선순위법이 있다. 後入先出法은 가장 늦게 만들어진 NODE 를 擇하는 것이고 우선순위법은 重要度가 가장 큰 NODE 를 擇하는 方法인데 大部分의 경우 그 NODE 에 있어서의 目的함수치의 下限이다.

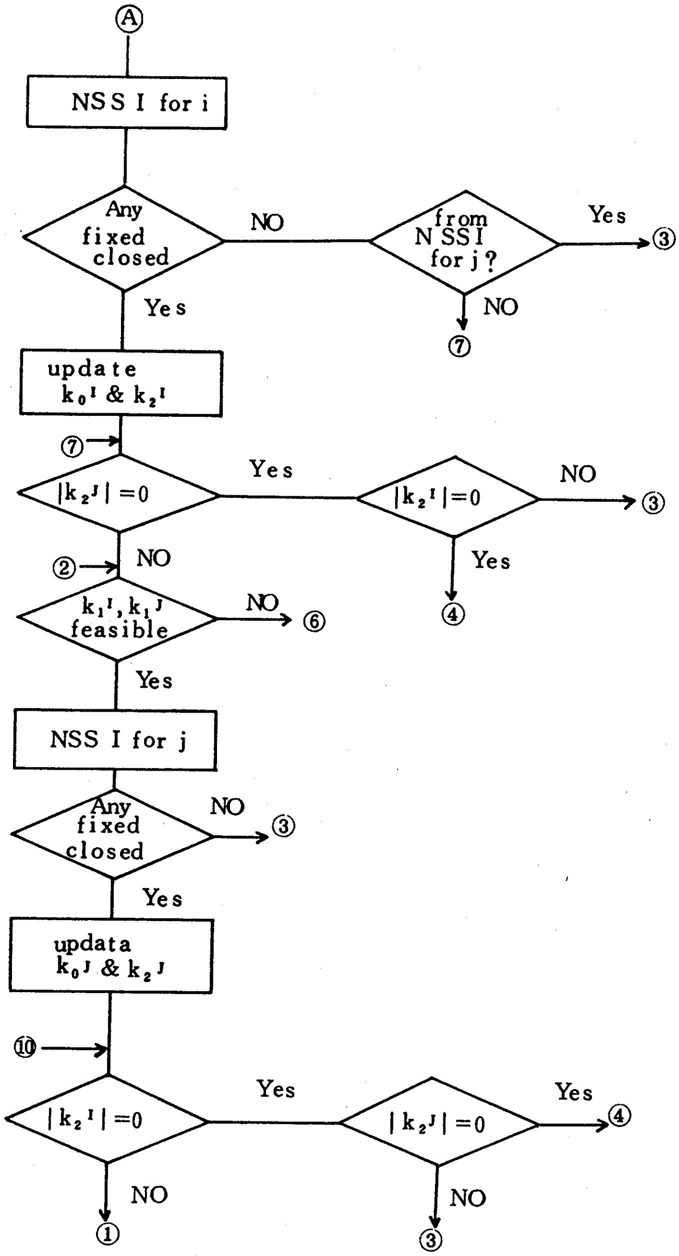
이 경우를 특히 最小下限法(Least Lower Bound)이라고 한다. 後入先出法은 記憶하고 있어야 할 候補問題의 數가 적기 때문에 컴퓨터 메모리의 容量을 적게 사용한다는 長點이 있으나 B&B 過程의 全體 計算時間이 相對的으로 크다는 短點이 있다. 反面에 最小下限法은 全體 計算時間은 後入先出法에 비하여 적게 所要되나, 컴퓨터 메모리의 사용용량이 크다는 短點이 있다. 本 研究에서는 NODE 選擇方法으로 最小下限法을 사용하였는데 이 때 필요한 電算機의 容量을 줄이기 위하여 考慮對象에서 除外된 NODE의 메모리 領域을 追加 發生되는 NODE에 割當하는 方法을 使用하였다.

4.2 흐름도 (FLOW CHART)

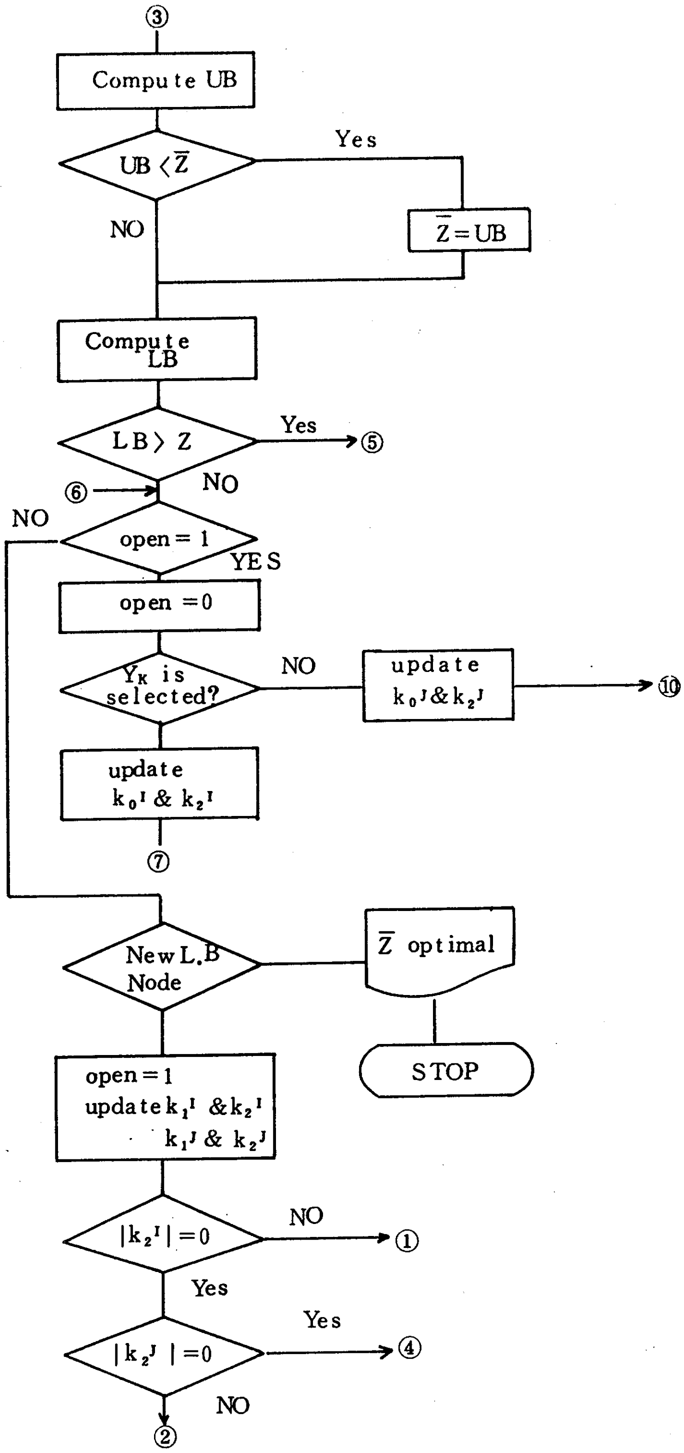
本 研究의 B & B 解法過程은 다음과 같은 흐름도로 表示할 수 있다.

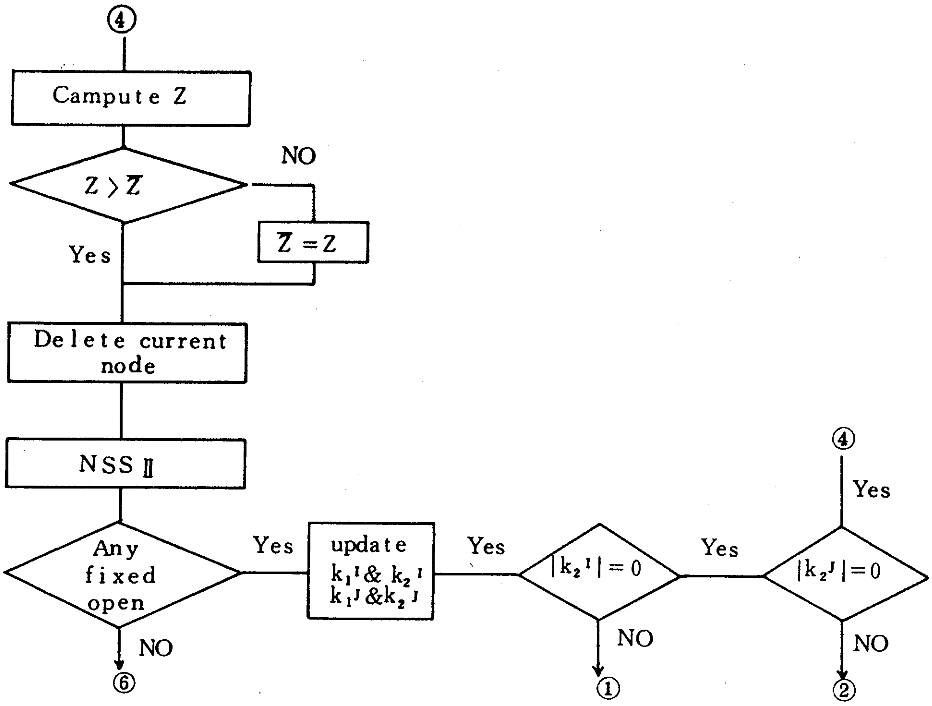
FLOW CHART





Ⓐ
NSS I for i
Any fixed closed
NO
from N SSI for j ?
Yes
③
NO
⑦
Yes
update $k_0{}^I$ & $k_2{}^I$
⑦
$|k_2{}^J|=0$
Yes
$|k_2{}^I|=0$
NO
③
Yes
④
②
NO
$k_1{}^I, k_1{}^J$ feasible
NO
⑥
Yes
NSS I for j
Any fixed closed
NO
③
Yes
updata $k_0{}^J$ & $k_2{}^J$
⑩
$|k_2{}^I|=0$
Yes
$|k_2{}^J|=0$
Yes
④
NO
①
NO
③


③
Compute UB
UB < Z̄
Yes
Z̄ = UB
NO
Compute LB
LB > Z
Yes
⑤
⑥
NO
NO
open = 1
YES
open = 0
Yκ is selected?
NO
update k₀ᴶ & k₂ᴶ
⑩
update k₀ᴵ & k₂ᴵ
⑦
New L.B Node
Z̄ optimal
STOP
open = 1
update k₁ᴵ & k₂ᴵ
k₁ᴶ & k₂ᴶ
|k₂ᴵ| = 0
NO
①
Yes
Yes
|k₂ᴶ| = 0
④
NO
②



第 5 章 計 算 結 果

5.1 槪 說

本 章은 B & B過程의 計算上 效率性을 높이기 위한 두가지 側面을 考察하고 本 解法을 利用하여 Sample 문제를 計算한 結果를 分析하고자 한다. B & B過程을 시작하면서 目的 함수치가 적은 Z값에서 출발할 수 있다면 B & B Tree 의 크기와 총 計算에 所要되는 時間을 크게 短縮할 수 있다. 또한 B & B과정에서 많은 輸送問題 (Transportation Problem) – 例로서 $T(K_1^I, K_1^J)$ 등 – 를 풀어야 하므로 몇개의 常數값이 變하였을 때 全體를 다시 풀지 않고서도 解를 구할 수 있는 方法이 있다면 역시 총 計算時間을 크게 短縮할 수 있다.

5.2 Z의 初期解(Initial solution)

Z의 初期解로서는 어떠한 實行可能解의 目的함수치, 혹은 알고있는 實行可能解가 없을 때에는 +∞로 시작할 수있으나, 다음과 같은 方法으로 別途의 計算없이 +∞보다 改善된 初期解를

갖고 시작할 수 있다. 우선 工場에 대해서 候補地의 工場中 開設에 드는 費用이 最少가 되는 工場을 選擇한다. 倉庫에 있어서는 開設費用이 적은 順序대로 選擇하되 총 需要를 만족시킬 수 있는 최소의 倉庫數가 되도록 정한다. 이와 같이 함으로써 別途의 計算없이 實行可能解를 求할 수 있으며 이 實行可能解를 初期解로서 使用한다. 이 경우에 각 需要地는 選擇된 倉庫로 부터 任意로 割當하면 된다.

5.3 Out-of-Kilter 法의 利用

本 B&B 과정을 거치면서 다음과 같은 여러 形態의 輸送問題를 풀게 된다.

(i) $T(K_1^I, K_1^J)$

(ii) $T(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\})$

(iii) CP′

위 3가지 形態의 문제들을 各 段階別로 푸는 것은 매우 어렵고 많은 시간을 필요로 하는 것처럼 보이나 實際로 各 段階別로 發生하는 問題들은 약간의 變數들에 대한 常數(係數)의 變化에 불과하다. 따라서 다음의 Out-of-Kilter 方法을 利用하면 크게 計算時間을 줄일 수 있다.

Out-of-Kilter法은 L.R. Ford. Jr와 D.R. Fulkerson〔5〕에 의하여 개발된 "單一製品 最小費用흐름 問題(Single Commodity Minimum Cost Flow Problem)"을 푸는데 매우 效率的인 計算方法이다. 單一製品 最小費用흐름 問題란 各 輸送아크(arc)의 上下限에 대한 條件과 供給 및 需要에 대한 諸條件을 만족하면서 총 輸送費用을 최소로 하는 問題이다. 위의 問題를 數式化하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \qquad \text{(式 5.1)}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{k} X_{ki} - \sum_{j} X_{ij} = 0 \qquad \text{(式 5.2)}$$

$$L_{ij} \leq X_{ij} \leq U_{ij}, \quad i = 1, \cdots\cdots, m; \quad j = 1, \cdots\cdots, m \qquad \text{(式 5.3)}$$

이 때 C_{ij} : $i \rightarrow j$ 아크에서의 單位製品 輸送費用

L_{ij} : $i \rightarrow j$ 아크에서의 輸送下限

U_{ij} : $i \rightarrow j$ 〃 輸送上限

위와 같은 形式을 循環形式(Circulation Form)이라고 한다. S_i를 條件式(式5.1)에 대응하는 雙對變數(Dual Variable)라고 하자. Out-of-Kilter 解法에서는 이를 NODE값(NODE PRICE)이라고 한다. 또한 h_{ij}를 條件式(式5.3)에 對應하는 雙對變數라고 하자. 그러면 最適解에 있어서 S_i와 h_{ij}의 관계는 다음과 같다.

$$h_{ij} = \mathrm{Max}\ (0,\ S_i - S_j + C_{ij})$$

또한 X_{ij}, S_i, h_{ij}가 다음을 만족하면 原問題 및 雙對問題의 最適解이다.

條件 i) $\{X_{ij}\}$가 原問題의 實行可能解

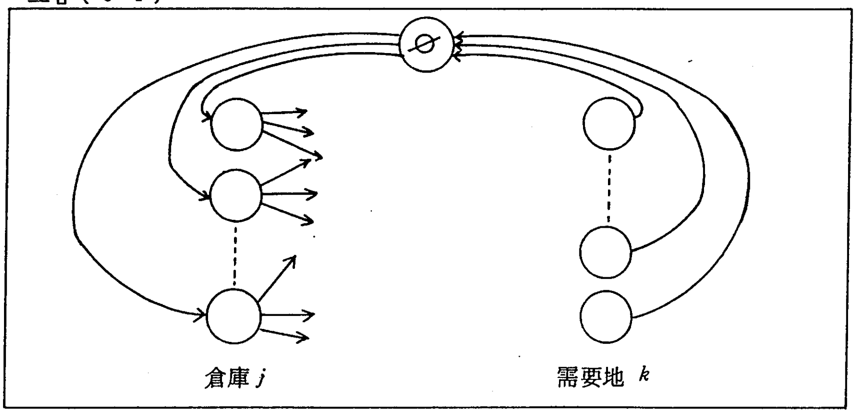
條件 ii) $\{S_i, h_{ij}\}$가 雙對問題의 實行可能解

條件 iii) $S_i - S_j + C_{ij} > 0 \Rightarrow X_{ij} = L_{ij} \quad \forall i,j$

$S_i - S_j + C_{ij} < 0 \Rightarrow X_{ij} = U_{ij} \quad \forall i,j$

Out-of-Kilter 解法은 위의 條件을 만족하는 狀態를 In-Kilter 狀態, 그외의 경우를 Out-of-Kilter 狀態라 하고 Out-of-Kilter 狀態의 Arc가 In-Kilter 狀態가 되도록 하여 最適解를 구하는 方法이다. 이러한 Out-of-Kilter 解法은 條件式(式5.2)을 만족시키는 어떠한 解에서도 출발할 수 있고 敏感度分析(Sensitivity Analysis)이 容易하므로 本 硏究의 各 段階에서 發生하는 輸送問題를 效率的으로 풀 수 있다. Out-of-Kilter 解法을 利用하기 위하여 T(A,B)를 그림(5-1)과 같은 循環形式으로 表示할 수 있다.

그림 (5-1)



그림(5-1)에서 각 아크의 C_{ij}, L_{ij}, U_{ij}는 표(5-1)과 같이 表示할 수 있다. 本 硏究에서 다루는 $T(K_1^I, K_1^J)$는 倉庫 및 工場의 開設與否에 따라 조금씩 變形된 形態가 된다. 또한 이러한 變化는 單一製品 最小費用흐름 問題에서 C_{ij}, L_{ij}, U_{ij}의 變化로 表示할 수 있다.

表 (5 - 1)

아 크 (i,j)	C_{ij}	L_{ij}	U_{ij}
ϕ → 倉庫 j	$C_{\phi j}$	0	W_j
倉庫 j → 需要地 K	C^2_{jk}	0	$\min\{W_j, D_K\}$
需要地 K → ϕ	0	D_k	D_k

$$(C_{\phi j} = \min_{i\in A} C^1_{ij})$$

例를 들어서 工場 i 의 閉鎖는 $C_{\phi j}$ 의 變化로서 表示되며 倉庫 j 의 閉鎖는 ϕ 에서 倉庫 j 로 가는 아크의 上限 W_j 를 0으로 놓음으로써 表示할 수 있다. 簡略化過程에서 Ω_j^w 를 計算할 때, $\Omega_j^w = V(K_1^I, K_1^J) - V(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\})$ 를 구해야 하는데 $V(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\})$ 는 이미 알고 있는 $T(K_1^I, K_1^J)$ 의 最適解를 이용하면 쉽게 구할 수 있다. $V(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\})$ 의 값은 $T(K_1^I, K_1^J)$ 에 해당하는 네트웍에서 아크($\phi \to j$)의 上限이 0 이었던 것을 W_j 로 바꾸고 $C_{\phi j}$ 의 값을 割當한 뒤에 Out-of-Kilter 解法을 이용하면 된다. 즉 위의 變化 後에도 계속 아크($\phi \to j$)가 in-Kilter 狀態에 있으면 $T(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\})$ 의 최적해는 $T(K_1^I, K_1^J)$ 와 동일함을 알 수 있고 이 경우에 $\Omega_j^w = 0$ 가 된다. 그러나 아크($\phi \to j$)가 Out-of-Kilter 狀態가 되면 一連의 NODE 값의 變化나 흐름의 變化를 통해 아크($\phi \to j$)를 in-Kilter 狀態로 變化시킨다. 이때 다른 아크들은 in-Kilter 狀態가 變化하지 않으므로 檢討對象 아크는 아크($\phi \to j$) 뿐이며 쉽게 $V(K_1^I, K_1^J \cup \{\hat{j}\})$ 의 값을 구할 수 있다.

5.4 計算結果의 分析

本 解法을 利用하여 Sample 問題를 計算한 結果가 표(5 - 2)에 나타나 있으며 一般的 整數計劃法 (Integer Programming)에 의한 計算結果와 비교해서 效率的임을 보여주고 있다.

표(5 - 2)

問 題 크 기 (工場× 倉庫 × 需要地)	計 算 時 間* (단위 : 초)	
	本 硏究解法	整數計劃法
5 × 6 × 7	2.117	8.754
5 × 6 × 20	2.401	12.326
6 × 9 × 20	4.201	17.243
6 × 9 × 20	21.425	100초이상

* IBM 4341 CPU 시간

第 6 章 結 論

本 硏究에서는 2 段階의 流通構造內에서, 供給能力에 制限이 없는 工場과 制限이 있는 倉庫의 立地選定을 同時에 다룰 수 있는 B & B解法을 提示하였다.

序論에서 밝힌 것처럼 1 段階 流通構造에 대한 많은 硏究와는 달리 2 段階 流通構造에 대한 硏究는 制限的으로 다루어져 왔으며 특히 NODE 簡略化過程을 이용한 硏究는 倉庫 및 工場의 供給能力에 制限이 없는 경우를 다룬 KAUFMAN 등 [8] 의 硏究에 불과하다. 이러한 경향은 1 단계 流通構造問題에서 유용하게 사용되었던 ERLENKOTTER [4] 의 LEMMA가 2 단계 流通構造에 사용할 수 없었기 때문이다. 따라서 過去 ERLENKOTTER LEMMA 의 단순 擴張을 通해서 2 段階 流通構造를 다루었던 많은 硏究가 誤謬를 犯한 狀態에서 發表되기도 하였던 것이다.

本 硏究에서는 倉庫의 供給能力만 制限이 있는 경우를 다루면서 ERLENKOTTER의 LEMMA를 變形하여 本 硏究의 B & B過程 導出에 밑바탕이 된 LEMMA를 제시하였다. 따라서 향후 ERLENKOTTER 의 LEMMA를 이용해서 2 단계 流通構造問題를 다루는 경우에 本 硏究가 도움이 될 수 있을 것으로 생각되며, 공장 및 倉庫에 모두 供給能力이 있는 경우와 追加的인 制約條件이 있는 경우에 대한 硏究가 계속되어야 할 것으로 생각된다.

〈 附 錄 〉 — Lemma 3, 4 의 證明

本 論文의 解法을 導出하는 過程에서 工場 및 倉庫의 立地가 定해진 경우에 Transshipment問題(式1)의 變換된 輸送問題(式2)를 T(A,B)로 定義하였다.

【式1】 Minimize $\sum_{i\in A}\sum_{j\in B}\sum_{k\in C}(C_{ij}^{1}+C_{jk}^{2})\,X_{ijk}$

Subject to

$$\sum_{i\in A}\sum_{k\in C} X_{ijk} \leqq W_j\ ,\quad j\in B$$

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} X_{ijk} = D_k\ ,\quad k\in C$$

$$X_{ijk} \geqq 0\ ,\qquad \forall (i,j,k)$$

【式2】 Minimize $\sum_{j\in B}\sum_{k\in C} C_{jk}\,X_{jk}$

T(A,B) Subject to

$$\sum_{k\in C} X_{jk} \leqq W_j\ ,\quad j\in B$$

$$\sum_{j\in B} X_{jk} = D_k\ ,\quad k\in C$$

$$X_{jk} \geq 0 \qquad \forall (j,k)$$

$$(C_{jk} = C_{jk}^2 + \min_{i \in A} C_{ij}^1)$$

【式 2 】에서 알 수 있듯이 새로운 工場 a 의 설치는 $\min_{i \in A \cup \{a\}} C_{ij}^1$ 을 통해 C_{jk}에 영향을 주고, 새로운 倉庫 b 의 設置는 倉庫 b 의 Capacity 가 0 에서 W_b 로 增加함으로써 목적함수에 영향을 주는 것으로 나타낼 수 있다.

【式 2 】는 $U_j(A,B)$, $V_k(A,B)$ 를 각각 倉庫 j 및 需要地 k 의 制約式에 해당하는 雙對變數라 할 때 다음과 같은 雙對問題로 表示할 수 있으며,

$$\text{Maximize} \quad \sum_{j \in B} U_j(A,B) - \sum_{k \in C} V_k(A,B)$$

$$\text{Subject to} \quad -U_j(A,B) + V_k(A,B) \leq C_{jk} \qquad \forall (j,k)$$

$$U_j(A,B) \geq 0 \qquad \forall j$$

最適解는 다음과 같은 조건을 만족한다.

(a) $X_{jk} \geq 0 \Rightarrow C_{jk} + U_j(A,B) - V_k A,B) = 0$

$X_{jk} = 0 \Rightarrow C_{jk} + U_j(A,B) - V_k(A,B) \geq 0$

(b) $U_j(A,B) > 0 \Rightarrow \sum_{k \in C} X_{jk} = W_j$

(c) $C_{jk} + U_j(A,B) - V_k(A,B) \geq 0$ for some i

이제 Erlenkotter〔4〕의 lemma를 利用하여 다음과 같은 性質을 導出할 수 있다.

Lemma 3

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ 이고 $T(A_1, B)$ 가 實行可能일 때 다음이 成立한다.

$U_j(A_1, B) \geq U_j(A_2, B)$, $j \in B - J^+$

$V_k(A_1, B) \geq V_k(A_2, B)$, $k \in C$

Where $J^+ = \{ j \mid \min_{i \in A_1} C_{ij}^1 - \min_{i \in A_2} C_{ij}^1 > 0,\ j \in B \}$

(증명) $T(A_1,B)$와 $T(A_2,B)$의 費用計數를 각각 $C_{jk}(A_1,B)$, $C_{jk}(A_2,B)$, 最敵解를 각각 $X_{jk}(A_1,B)$, $X_{jk}(A_2,B)$라 표시하기로 한다. $C_{jk}(A_1,B)$, $C_{jk}(A_2,B)$는 다음과 같은 관계가 成立한다.

$$\begin{cases} C_{jk}(A_1,B) = C_{jk}(A_2,B), \ \forall(j,k) \in \{(j,k) \mid j \in B-J^+,\ k \in C\} \\ C_{jk}(A_1,B) - C_{jk}(A_2,B) = \triangle_j > 0, \ \forall(j,k) \in \{(j,k) \mid j \in J^+, k \in C\} \end{cases}$$

證明을 위해서 $J^+=\{r\}$인 경우만을 보이는 것으로 充分하다. 따라서

$$\begin{cases} C_{jk}(A_1,B) = C_{jk}(A_2,B), \ \forall j \in B-\{r\},\ k \in C \\ C_{rk}(A_1,B) - C_{rk}(A_2,B) = \triangle_r > 0 \quad \forall\, k \in C \end{cases}$$

인 경우만을 생각한다.

$T(A_1,B)$의 最敵解에서 다음의 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

i) $\sum_{k \in C} X_{rk}(A_1,B) = W_r$

ii) $\sum_{k \in C} X_{rk}(A_1,B) = W_r^* < W_r$

i)의 경우

$U_j(A_2,B)$, $V_k(A_2,B)$, $X_{jk}(A_2,B)$를 아래와 같이 정하면,

$$\begin{cases} U_j(A_2,B) = U_j(A_1,B), \ j \in B-\{r\} \\ U_r(A_2,B) = U_r(A_2,B) + \triangle_r \end{cases} \qquad \cdots\cdots (1)$$

$$V_k(A_2,B) = V_k(A_1,B),\ k \in C \qquad \cdots\cdots (2)$$

$$X_{jk}(A_2,B) = X_{jk}(A_1,B),\ j \in B,\ k \in C$$

$U_j(A_1,B)$, $V_k(A_1,B)$가 최적조건 (a)(b)(c)를 모두 만족하므로 $U_j(A_2,B)$, $V_k(A_2,B)$도 최적조건을 만족한다. 이 경우에 최적해는 變하지 않는다. 또한 (1)(2)에서 lemma가 成立한다.

ii)의 경우

$U_j^*(A_2,B)$, $V_k^*(A_2,B)$, $X_{jk}^*(A_2,B)$를 다음과 같이 정한다.

$$U_j^*(A_2,B) = U_j(A_1,B),\ j \in B-\{r\} \qquad \cdots\cdots (3)$$

$$U_r^*(A_2,B) = U_r(A_1,B) + \triangle_r \qquad \cdots\cdots (4)$$

$$V_k^*(A_2,B) = V_k(A_1,B),\ k \in C \qquad \cdots\cdots (5)$$

$$X_{jk}^*(A_2,B) = X_{jk}(A_1,B),\ j \in B,\ k \in C$$

그런데 $U_r^*(A_2,B) > 0$이고 $\sum_{k \in C} X_{rk} < W_r$이므로 (b)의 조건을 만족시키지 못해 최적해가

아니다. $U_j^*(A_2,B)$, $V_k^*(A_2,B)$, $X_{jk}^*(A_2,B)$ 는 $T(A_2,B)$ 에서 W_r 이 W_r^* 인 경우의 最敵解이므로 $U_j(A_2,B)$, $V_k(A_2,B)$와 다음과 같은 관계가 成立한다.

(Erlenkotter lemma 1)

$$U_j(A_2,B) \leqq U_j^*(A_2,B) = U_j(A_1,B), \; j\in B-\{r\} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$U_r(A_2,B) \leqq U_r^*(A_2,B) = U_j(A_1,B) + \triangle_r$$

$$V_k(A_2,B) \leqq V_k^*(A_2,B) = V_k(A_1,B), \; k\in C \quad \cdots\cdots (7)$$

따라서 (6)(7)에서 lemma가 成立됨을 알 수 있다. (Q.E.D)

$T(.,.,.)$의 최적해의 목적함수값을 $V(.,.,.)$라 표시하고 $j\in B$ 에 대해 $\hat{j}$가 현재 開設된 工場與否에 관계없이 工場候補地의 可能한 總集合A 로 부터 최소의 費用으로 供給받을 수 있는 倉庫를 表示한다고 정의한다. 즉, $\hat{C}_{jk} = C_{jk}^2 + \min_{i\in A} C_{ij}^1$이다. 이 경우에 다음 lemma가 成立한다.

Lemma 4

$B_1\subseteq B_2\subseteq B$, $A_1\subseteq A_2\subseteq A$이고 $T(A_1,B_1)$이 實行可能일 때, $r\in B-B_2$에 대하여 다음이 成立한다.

$$V(A_1,B_1) - V(A_1,B_1\cup\{\hat{r}\})$$

$$\geqq V(A_2,B_2) - V(A_2,B_2\cup\{r\})$$

(證明) $V(A_1,B_1) - V(A_1,B_1\cup\{\hat{r}\}) = \int_0^{W_r} U_{\hat{r}}(A_1,B_1)\, d\triangle W_r$

$V(A_2,B_1) - V(A_2,B_1\cup\{\hat{r}\}) = \int_0^{W_r} U_{\hat{r}}(A_2,B_1)\, d\triangle W_r$

그런데 lemma 3에 의해 $U_{\hat{r}}(A_1,B_1) \geqq U_{\hat{r}}(A_2,B_1)$

$\because \; \hat{C}_{rk} = C_{rk}^1 + \min_{i\in A} C_{rk}^2, \; \hat{r} \notin J^+$ 이므로

$\therefore \; V(A_1,B_1) - V(A_1,B_1\cup\{\hat{r}\}) \geqq V(A_2,B_1) - V(A_2,B_1\cup\{\hat{r}\}) \quad \cdots\cdots (1)$

그런데 Erlenkotter lemma 2에 의해

$V(A_2,B_1) - V(A_2,B_1\cup\{\hat{r}\}) \geqq V(A_2,B_2) - V(A_2,B_2\cup\{\hat{r}\}) \quad \cdots\cdots (2)$

그리고 정의에 의하여,

$V(A_2,B_2\cup\{r\}) \geqq V(A_2,B_2\cup\{\hat{r}\}) \quad \cdots\cdots (3)$

(1)(2)(3)에 의해서 lemma 4가 成立 (Q.E.D)

參 考 文 獻

1. Akinc, U. and Khumawala, B.M.; "An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem"; Management Science, Vol.23, No.6, 1977, pp.585-594.

2. Elson, D.G.; "Site Location Via Mixed - Integer Programming", Operational Research Quaterly, Vol.23, No.1, 1972, pp.31-43.

3. Ellwein, L.B. and Gray, P.; "Solving Fixed Charge Location - Allocation Problems with Capacity and Side Constraints", AIIE Transactions, Vol.3, No.4, 1971, pp.290-298.

4. Erlenkotter, D.; "Preinvestment Planning for Capacity Expansion; A Multi-Location Dynamic Model", USAID, New Delhi.

5. Ford, L.R. Jr., and D.R. Fulkerson, Flows in Network, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962.

6. Geoffrion, A.M.; "A Guide to Computer Assisted Methods for Distribution System Planning"; Sloan Management Review, Vol.16, No.2, 1975, pp.17-41.

7. Geoffrion, A.M. and Graves, G.W.; "Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition"; Management Science, Vol.20, No.5, 19, pp.822-844.

8. Kaufman, L., Eede, M.V. and Hansen, P.; "A Plant and Warehouse Location Problem"; Opl. Res. Quart; Vol.28, No.3, 1977, pp.547-554.

9. Kennington, J.L., "The Fixed-Charge Transportation Problem: A Computer study with a B & B Code" A.I.I.E. Trans., Vol.8, No.2, pp.241-247, 1976.

10. Kuester, J.L. and Mize, J.H.; Optimization Techniques with Fortran, McGraw-Hill, 1973, pp.66-90.

11. Malek-Zàvarei, M. and I.T. Frisch, "On the Fixed Cost Flow Problem", International Journal of Control, Vol.16, No.5, pp.897-902, 1972.

12. McGinns, L.F.; "A survey of Recent Results for a Class of Facilities Location Problem"; A.I.I.E. Trans. Vol.9, No.1, 1977, pp.11-17.

13. Rardin, R.L. and V.E. Unger, "Solving Fixed Charge Network Problem with Group Theory-Based Penalties", Nav. Res. Log. Quart. Vol.23, No.1, pp.67-84, 1976.

14. Revelle, C., D. Marks and J.C. Liebman, "An Analysis of Private and Public Sector Location Models", Management Science, Vol.16, No.11, pp.692-707, 1970.

15. Roodman, G.M. ans Schwarz, L.B.; "Extension of the Multi-Period Facility Phase-Out Model", AIIE. Trans., Vol.9, No.1, 1977, pp.103-107.

16. Tcha & Choi; "A New B & B Algorithm for the Warehouse Location Problem in a Two-Stage Distribution System", Asian Institute of Tech., Bangkok, 3-6 Nov. 1980, pp.561-580.