

공적분 분석에 의한 우리나라 국채의 기간프리미엄 추정

송재은*

요약

이 논문은 장단기금리 사이의 공적분을 이용한 벡터오차수정모형을 통해 우리나라 1,3,10년물 국채의 수익률을 3개월물 국채의 수익률 대비 기간프리미엄과 기대가설에 의해 설명되는 부분으로 분해했다. 이 분석을 통해 약한 형태의 기대가설을 검정한 결과, 우리나라의 국채의 경우 기대가설이 약한 형태로라도 성립한다고 보기는 어려웠다. 하지만 이를 통해 추정한 우리나라 중·장기금리의 기간프리미엄은 매우 안정적인 모습을 보여 우리나라 중·장기금리 변화의 대부분은 기대가설에 의해, 즉 미래 단기금리의 변화에 대한 투자자들의 예측에 의해 설명되는 것으로 나타났다. 다만 기간스프레드가 일정기간 확대된 수준을 유지할 때는 기간프리미엄 역시 상대적으로 높은 수준을 유지하는 경향이 있다.

핵심 주제어 : 기간스프레드, 기간프리미엄, 수익률 분해

* 서강대학교 지암남덕우경제연구원 책임연구원, jesong@sogang.ac.kr

<논문 투고일> 2023.4.10

<논문 수정일> 2023.4.19

<게재 확정일> 2023.4.25

I. 서론

국채수익률의 기간스프레드(term spread) 즉 장단기금리차는 우리나라를 비롯한 주요 선진국에서 경기선행지수의 구성에 포함되는 등 경기전망을 위한 지표로 사용된다. 하지만 2007년 미국발 글로벌 금융위기 이후 다수의 실증분석 결과 장단기금리차의 경기예측력이 의문시되고 있다.

기대가설(expectations hypothesis)에 의하면 장단기금리차가 미래의 경기에 대한 정보를 포함하는 것은 장기금리에 미래의 단기금리에 대한 채권투자자들의 예측이 반영되기 때문이다. 하지만 기대가설이 성립하기 위해서는 만기가 다른 채권들이 서로 완전대체재여야 하는데, 무위험 채권도 만기 전에 이를 처분할 때 기대되는 수익은 불확실하므로, 채권투자자들이 위험기피적인 한 이 가설이 완벽하게 성립하기는 어렵다. 유동성선호가설(liquidity preference hypothesis)에 의하면, 채권의 만기가 멀수록 유동성을 조달하기 위해 이를 만기 전에 처분해야 할 가능성이 커지며, 장기금리에는 상대적으로 큰 불확실성을 보상하는 유동성프리미엄(liquidity premium)이 포함되어야 한다.

한편 선호서식지이론(preferred habitat theory)은 단기채권이 유동성은 풍부하지만, 장기적인 수익을 추구하면서 단기채권을 롤오버하는 것 역시 불필요한 불확실성과 거래비용을 발생시킨다는 점을 강조한다. 이 이론에 의하면, 채권투자자들이 적당하다고 판단하는 만기는 각자의 여건에 따라 다르며, 각각의 기간별 이자율은 어느 정도 독립적인 채권시장의 수급에 의해 결정된다.¹⁾

따라서 장단기금리차에 포함된 정보를 정확하게 추출하기 위해서는 먼저 장기금리를 기대가설로 설명되는 부분과 나머지 부분인 기간프리미엄(term premium)으로 분해할 필요가 있다. 이러한 분해를 위해서는 미래의 단기금리에 대한 채권투자자들의 예측을 알아야 하는데, 합리적 기대(rational expectations)를 가정하면, 이 예측은 연구자가 모형에서 얻는 예측과 같아야 한다. 따라서 이러한 분해는 기간구조(term structure)를 포함하는 이자율모형을 전제로 하며, 어떤 모형을 사용

1) 선호서식지이론은 채권투자자들이 처한 투자 여건의 차이가 채권시장을 분할시킨다고 간주하지만, 이들이 주어진 여건만이 아니라 시장 상황을 고려해 만기를 선택한다고 가정하는 점에서 일반적인 시장분할가설(market segmentation hypothesis)과 다르다.

하느냐에 따라 결과가 완전히 달라질 수 있다.

미국이나 유럽 국가의 국채수익률에 대해서는 다양한 이자율모형을 사용하여 이를 분해하는 연구가 이루어졌으며, 상이한 모형에 따른 결과를 비교하는 연구도 드물지 않은 반면, 국내 국채수익률에 대한 선행연구는 수익률의 분해보다는 예측성능에 집중하고 있으며, 사용된 모형 역시 매우 제한적이다.

이 논문에서는 Hall et al.(1992)의 벡터오차수정모형(vector error correction model, 이하 VECM)을 사용하여 우리나라 국채의 수익률을 분해하고 장기금리의 기간프리미엄을 추정한다. 장단기금리 사이의 공적분(cointegration)을 이용한 이러한 모형은 이자율의 기간구조의 추정에 한계를 가지고 있어 국채 수익률을 분해하는 최근 연구에는 잘 사용되지 않는다.²⁾ 하지만 이 모형은 기대가설 검정의 표준적인 방법을 제시한 Campbell and Shiller(1987,1991)의 벡터자기회귀(vector autoregression, 이하 VAR)모형을 확장한 것임에도 불구하고 국내 이자율에 대한 분석에는 사용되지 않았다.³⁾ 따라서 이 논문의 분석은 국내 국채수익률을 분해하고 장기금리의 기간프리미엄을 추정하는 연구의 첫 번째 단계로서 후속 연구를 위한 기초작업으로서 의미가 있으며, VAR모형이나 VECM을 이자율모형으로 사용한 기존의 연구와 차별화된다.

분석결과 미국 국채수익률(Treasury yield) 자료에서와 마찬가지로 우리나라의 경우에도 기대가설이 약한 형태로도 성립한다고 보기 어려웠다. 하지만 1,3,10년물 국채의 3개월물 대비 기간프리미엄은 상당히 안정적인 모습을 보여 이들 장기금리 변화의 대부분은 기대가설에 의해, 즉 미래 단기금리의 변화에 대한 투자자들의 예측에 의해 설명되는 것으로 나타났다. 다만 10년물 국채 수익률의 기간프리미엄은 단기금리가 급락할 때 급등하고 단기금리가 급등할 때 급락하는 모습이 뚜렷하게 나타나며, 이러한 급등 혹은 급락에 앞서 완만하게 하락하거나 상승하는 모습을 보인다. 이는 추정한 기간프리미엄이 장단기금리차의 불균형오차에 기인하며 그 변화가 이러한 오차를 수정하는 방향으로 이루어지기 때문인 것으로 판단된다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 II장에서는 연구에 사용된 기간프리미엄의

2) 이러한 한계에 대해서는 II장에서 설명한다.

3) 이 모형이나 이를 변환한 VAR모형에는 특정한 제약이 부과되므로 이러한 제약을 부과하지 않은 VAR모형이나 VECM을 사용한 분석은 같은 모형을 사용했다고 할 수 없다.

정의와 선행연구를 소개한다. 다음으로 III장에서는 실증분석에 사용된 자료와 모형, IV장에서는 분석의 결과를 제시하였다. 마지막으로 V장에서는 연구의 결론을 간략하게 서술하였다.

II. 이론적인 배경

1. 장기금리의 분해

이 논문에서 이자율은 무위험 명목채권(risk-free nominal bond)의 만기수익률을 의미하며,⁴⁾ 이때 수익률은 로그 명목수익률이다. 또한 이하에서 언급되는 채권은 모두 무위험 명목채권이다. 본 절의 이론적인 논의에서는 편의상 대출의 원리금이 전부 만기에 상환되는 경우, 즉 이들 채권이 무이표채(zero-coupon bond)인 경우를 고려한다.

만기까지 τ 기간이 남아있고, 만기에 1원을 지급하는 할인채(discount bond)의 t 기의 가격을 $P_{\tau,t}$ 원이라 하고, t 기의 n 기간 이자율을 $y_{\tau,t} \stackrel{\text{def}}{=} -(1/\tau)\ln P_{\tau,t}$ 로 나타내자. 기대가설에 의하면 장기채권의 만기수익률은 이 채권의 잔존기간 동안 단기채권을 롤오버(roll-over)할 때 기대되는 수익률과 같다. 이하에서는 이러한 롤오버의 단위가 되는 단기를 h 기간으로 고정한다. 이제 h 의 양의 배수 집합을 \mathbb{N}_h 으로 나타내고, 주어진 $n \in \mathbb{N}_h$ 기간에 대해 $t, t+h, t+2h, \dots, t+n-h$ 기 단기금리의 평균을

$$R_{n,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} y_{h,t+jh}, \quad \nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{h}$$

로 나타내면, 기대가설은 임의의 t 기에 $y_{n,t} = \mathbb{E}_t R_{n,t}$ 임을 의미한다. 여기서 \mathbb{E}_t 는 t

4) 여기서 “무위험”이란 신용위험(credit risk), 즉 채무가 약정한 대로 이행되지 않을 위험이 없다는 의미이며, 명목채권은 정해진 시기에 고정된 명목원리금의 상환을 약정하는 전형적인 채권을 말한다.

기에 채권투자자들이 형성하는 기대를 나타내는데, 대부분의 관련 연구에서와 마찬가지로 본 연구에서도 합리적 기대를 가정한다.

만기가 $\tau \geq h$ 기간 남은 채권을 t 기에 매입해 h 기간 동안 보유할 때의 보유기간 수익률(holding period return)을

$$rh_{\tau,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} (\ln P_{\tau-h,t+h} - \ln P_{\tau,t})$$

로 나타내고, 이러한 장기채권 단기 보유의 같은 기간 단기금리에 대한 초과수익률을 $rx_{\tau,t} \stackrel{\text{def}}{=} rh_{\tau,t} - y_{h,t}$ 로 나타내자. 본 연구에서는 h 기간 단기금리에 대한 $n \in \mathbb{N}_h$ 기간 장기금리의 t 기 기간프리미엄을 $t+n$ 기가 만기인 채권을 $t, t+h, t+2h, \dots, t+n-h$ 기부터 h 기간씩 보유할 때 t 기에 기대되는 평균 초과수익률

$$TP_{n,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} \mathbb{E}_t rx_{n-jh,t+jh}$$

로 정의한다.⁵⁾ 채권의 만기수익률은 다음과 같이 단기 보유기간수익률의 평균으로 나타낼 수 있으며,

$$y_{n,t} = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} rh_{n-jh,t+jh} = R_{n,t} + \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} rx_{n-jh,t+jh} \quad (1)$$

이 식의 양변에 t 기에서의 기대를 취하면

5) 부록 A에서 보인 것처럼 이 기간프리미엄은 미래에 기대되는 단기금리에 대한 해당 기간 선도금리의 위험프리미엄을 장기금리의 대출기간 전체에 걸쳐 평균한 것과 같다. Fama and Bliss(1987) 등 일부 연구에서는 평균을 취하지 않은 장기채권 보유의 기대초과수익률이나 선도금리의 위험프리미엄을 기간프리미엄으로 정의하기도 하지만, 최근의 연구에서는 평균을 취하는 것이 일반적이다.

$$y_{n,t} = \mathbb{E}_t R_{n,t} + TP_{n,t} \quad (2)$$

이 성립한다. 즉 장기금리는 기대가설에 의한 부분과 단기금리에 대한 기간프리미엄으로 분해되며, 장기금리에서 기대가설로 설명되지 않는 부분이 단기금리에 대한 기간프리미엄이다.

장기금리 $y_{n,t}$ 를 분해하려면 $\mathbb{E}_t R_{n,t}$ 를 구성하는 미래 단기금리에 대한 채권투자자들의 예측 $\mathbb{E}_t y_{h,t+jh}$, $j = 1, 2, \dots, \nu - 1$ 을 추정해야 하는데, 합리적 기대를 가정하므로 이는 모형에 의해 주어지는 조건부기대 $\mathbb{E}[y_{h,t+jh} | \Omega_t]$, $j = 1, 2, \dots, \nu - 1$ 와 같아야 한다. 여기서 Ω_t 는 t 기의 정보집합(information set)이다. 따라서 기간프리미엄의 추정은 장단기금리를 포함하는 이자율모형을 전제로 하며, 특히 이들 이자율 변화의 횡단면(cross section)인 이자율의 기간구조를 어떤 방식으로 모형화하는지가 중요하다.

2. 오차수정모형에 기초한 분석

Campbell and Shiller(1987,1991)는 미국의 국채수익률 자료에서 기대가설을 검정하면서, 장단기금리 각각은 1차 적분된(integrated) 시계열이지만 장단기금리차는 안정적인(stationary) 시계열로 볼 수 있는 경우, 이러한 공적분을 이용한 VAR모형으로 장단기금리의 변화를 동시에 분석하는 방법을 제시하였다.

이제 t 기 h 기간 이자율과 $n \in \mathbb{N}_h$ 기간 이자율 사이의 장단기금리차, 즉 기간스프레드(term spread)를 $s_{n,t} \stackrel{\text{def}}{=} y_{n,t} - y_{h,t}$ 로 나타내면,

$$s_{n,t} = \mathbb{E}_t S_{n,t} + TP_{n,t}, \quad S_{n,t} \stackrel{\text{def}}{=} R_{n,t} - y_{h,t} \quad (3)$$

이 성립하며, 기대가설은 임의의 t 기에 $s_{n,t} = \mathbb{E}_t S_{n,t}$ 임을 의미한다. 즉 장기금리와 마찬가지로 장단기금리차도 기대가설에 의한 부분과 기간프리미엄으로 분해된다.

Campbell and Shiller(1987,1991)는 현재가치(present value)모형의 맥락에서 채권투자자들이 가진 미래의 단기금리에 대한 정보가 장기금리에 반영되므로 현재까지의 단기금리에 반영되지 않은 미래의 단기금리에 대한 정보가 장단기금리차에 포함된다고 간주했다. 이를 토대로 이들은 안정적인 시계열로 볼 수 있는 단기금리의 변화분 $\Delta y_{h,t}$ 과 장단기금리차 $s_{n,t}$ 로 이루어진 2차원 VAR모형을 추정한 후, 이 모형에 의한 예측치 $\mathbb{E}_t \Delta y_{h,t+k}, k = 1, 2, \dots, n$ 와

$$S_{n,t} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \Delta_h y_{h,t+jh} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^h \left(1 - \frac{j}{n}\right) \Delta y_{h,t+(j-1)h+k} \quad (4)$$

의 관계를 이용하여,⁶⁾ 기대가설에 의한 부분 $\mathbb{E}_t S_{n,t}$ 을 추정하였다. 이들은 이 추정치를 기대가설의 검정에 사용하였는데,⁷⁾ 이를 사용하여 기간프리미엄을 추정할 수도 있다. 이러한 VAR모형은 장단기금리차의 공적분을 이용한 VECM을 관측상 동일한 형태로 변환한 것으로 간주할 수 있는데, 본 연구의 실증분석은 이러한 VECM을 사용하므로 해당 변환에 대해서는 다음 장에서 설명한다.

오차수정모형(error correction model, 이하 ECM)이나 VECM을 사용해 장단기금리의 변화를 동시에 분석하는 방법은 실증분석 연구에 널리 활용되면서 보다 일반적인 상황을 다루는 방향으로 확장되며, 특히 비선형(non-linear)이거나 불안정(non-stationary)한 공적분을 다룰 수 있는 모형의 도입이 활발하게 이루어진다.⁸⁾ 이러한 확장 중 Clarida et al.(2006)의 연구는 Enders and Granger(1998)에 의해 제안된 M-TAR(moment threshold autoregression) 방식을 마코프전환(Markov-switching) VECM에 도입하여 공적분에 비대칭성(asymmetry)과 국면

6) 여기서 Δ_h 는 h 기 전에서부터의 변화분을 의미한다. 즉 $\Delta_h x_t \stackrel{\text{def}}{=} x_t - x_{t-h}$ 이다.

7) Campbell and Shiller(1991)는 $\mathbb{E}_t S_{n,t}$ 의 추정치와 실제 장단기금리차를 비교했는데, 양자의 상관관계는 1에 가깝지만, 표준편차는 기대가설로 설명되는 변동이 전체의 반 정도에 불과해 기대가설이 성립한다고 보기는 어렵다고 결론지었다.

8) Evans and Lewis(1994)는 변동하는 기간프리미엄을 도입하더라도 그 시계열이 공분산 안정적(covariance stationary)이라고 가정하면 사후적인(ex post) 초과수익률을 설명할 수 없음을 보이고, 이자율 변화에 국면전환이 존재할 가능성을 제시하였다.

전환(regime shift)이 존재할 가능성을 다루었다. 한편 ECM에 기초하여 국내 장단기금리의 변화를 분석한 연구로는 서병선(2000)과 김기호(2014)의 연구가 있는데, 이들은 우리나라의 국채수익률에 비대칭성이 존재할 가능성을 확인했다.

ECM 형태의 모형은 이자율의 기간구조 전체에 대한 이론에 기초하고 있지 않다는 점에서 기간프리미엄의 추정에 한계를 가지고 있다. 즉 이러한 이자율모형에 의해 추정되는 기간프리미엄의 변화는 장단기금리차의 불균형오차에 의해 생성되는 것이며, 유동성프리미엄 등 기간프리미엄을 결정하는 이론적인 요인과 직접적인 연관이 없다. 또한 이러한 모형은 현재가치평가모형(present value model)을 토대로 하고 있으나, 자산가격결정이론(asset pricing theory)에 의하면 미래의 이자율에 대한 새로운 정보는 채권가격에 즉각 반영되어야 한다. 따라서 장단기금리차가 장기균형 수준을 서서히 회복하는 오차수정과정은 자산가격결정이론에 부합하지 않는 면이 있다. 한편 실증분석에 있어서도 이러한 오차수정과정은 모형에 충분한 시차의 이자율이 포함되어야 함을 의미하는데, 특히 다수의 기간별 이자율이 모형에 포함되는 경우, 이자율의 시차가 늘어나면 설명변수의 개수가 급격하게 늘어나면서 자유도의 감소와 과적합(overfitting) 가능성이 심각해진다. 따라서 실증분석 면에서도 최대한 다양한 기간별 이자율 자료를 활용하여 이자율의 전체 기간구조를 파악하려는 목적의 연구에는 ECM이 적합하지 않다.

3. 동태요인모형에 기초한 분석

이자율에 대한 동태요인모형(dynamic factor model, 이하 DFM)은 비관측요인(latent factor)을 포함한 공통요인(common factor)들이 상태변수로서 같은 기의 기간별 이자율을 결정하는 방식을 나타내는 측정방정식(measurement equation)과 이들 요인의 확률적 진행법칙(stochastic law of motion)을 나타내는 전이방정식(transition equation)으로 구성된 선형 상태공간모형(linear state-space model)으로 표현된다.⁹⁾

DFM 형태의 이자율모형은 채권투자자들이 미래의 채권가격 예측에 현재 가진

9) Jungbacker et al.(2014) 등이 사용한 일반화된 DFM에서는 공통요인이 상태변수가 아닐 수도 있지만, 이 경우 공통요인들을 상태변수들의 선형결합으로 가정하므로 일반화된 DFM 역시 선형 상태공간모형으로 표현될 수 있다.

모든 정보를 이용한다는 점에서 자산가격결정이론에 충실할 뿐만 아니라, 모든 기간별 이자율의 변동을 소수 공통요인의 변동으로 대부분 설명할 수 있다는 주성분 분석(principal component analysis, PCA)의 결과에도 부합한다. 하지만 이러한 모형에서도 공통요인이 각각의 기간별 이자율에 미치는 영향이 완전히 독립적이라고 가정하면, 이들 요인보다 상당히 많은 수의 기간별 이자율이 모형에 포함될 때 자유도의 감소와 과적합 가능성이 심각해진다. 따라서 DFM을 사용하여 다수의 기간별 이자율의 변화를 분석할 때는 이론적 정합성이나 효율적인 추정을 위해 이자율의 기간구조를 나타내는 측정방정식의 적재행렬/loading matrix)에 제약을 부과하는 것이 일반적이다.

DFM 형태를 가진 모형 가운데 다수 기간별 이자율 변화의 분석에 가장 널리 사용되는 유형은 측정방정식에 무차익거래조건(no-arbitrage condition)을 부과하는 동태기간구조모형(dynamic term structure model, 이하 DTSM)이다. 채권시장에 마찰(friction)이 없다고 가정할 때, 채권매매에서 위험이 없는 차익이 발생하지 않기 위해서는 각 채권의 현재 가격이 만기까지의 확률적 할인요인(stochastic discount factor, 이하 SDF)에 대한 합리적 기대와 같아야 하며,¹⁰⁾ 매기의 단위 기간 SDF는 같은 기간 이자율의 할인율인 위험중립적(risk-neutral) 할인요인과 이런 할인을 제외한 조건부 SDF로 분해된다.¹¹⁾ DTSM은 매기 위험의 시장가격이 해당 기의 조건부 SDF를 결정하는 환경을 전제로 매기 공통요인이 해당 기 단위 기간 이자율과 위험의 시장가격을 결정하는 방식에 대해 가정한다.¹²⁾ 이러한 가정과 전이방정식은 단위기간 SDF가 변화하는 확률과정을 결정하며, DTSM의 적재행렬에는 각 기간별 이자율이 대출기간에 걸친 단위기간 SDF의 변화에 대한 합리적 기대에 의해 주어져야 한다는 제약이 부과된다. SDF를 분해하여 생각할 때, 이

10) 이는 만기에 1원을 지급하는 무위험 할인채를 고려하고 있기 때문이다.

11) 자산시장에 마찰이 없고 무위험의 차익거래가 불가능하다면 물리적인 \mathbb{P} -확률측도와 관측상 동일한 자산가격을 생성하는 위험중립적인 \mathbb{Q} -확률측도가 존재하며, 조건부 SDF는 이러한 \mathbb{Q} -확률측도에 대한 \mathbb{P} -확률측도의 Radon-Nikodym 도함수에 해당한다.

12) 관련 논의에서는 어떤 기에 각 요인의 조건부 기댓값을 위험중립적인 \mathbb{Q} -확률측도에서의 조건부 기댓값과 같아지도록 하는 보상으로 구성된 벡터를 해당 기의 위험프리미엄으로 정의하며, 위험의 시장가격은 각 요인의 조건부 분산이 1단위이고 이들 요인이 서로 독립적일 경우의 위험프리미엄을 의미한다. DTSM은 원래 연속시간 모형이며 이를 발전시킨 후속 연구에서도 대부분 연속적인 시간을 가정하지만, 여기서는 DFM의 틀에 맞춰 Ang and Piazzesi(2003)의 이산시간 모형을 기준으로 설명한다.

러한 제약은 단위기간 이자율에 대한 같은 기간 채권 보유의 기대초과수익률이 전적으로 가격 변동으로 인한 수익률의 불확실성에 대한 보상임을 의미한다.

초기 DTSM는 단일요인을 가정하였으나 이후 복수요인을 가정한 모형으로 확장되었는데, Duffie and Kan(1996), Dai and Singleton(2000) 등이 발전시킨 여파인 기간구조모형(affine term structure model, 이하 ATSM)은 대표적인 DTSM으로 자리 잡고 있다. 표준적인 ATSM은 매기의 단위기간 이자율과 위험의 시장가격을 같은 기 공통요인들의 선형함수로 가정하며, 이들 요인이 Gaussian VAR모형에 의해 생성된다고 가정한다. DTSM은 표준적인 ATSM을 확장하는 방향으로 발전하는데, 공통요인들이 전이하는 방식을 확장한 Cheridito et al.(2007)과 Dai et al.(2007), 이들 요인과 위험의 시장가격 사이의 관계를 확장한 Duarte(2004), 이들 요인과 단위기간 이자율 사이의 관계를 확장한 Ahn et al.(2002) 등이 있다.

DFM 형태를 가진 다른 유형의 모형들은 이자율의 전체 기간구조, 즉 채권 수익률곡선(yield curve)을 요인별 적재량(factor loading)의 선형결합으로 이루어진 연속함수로 가정하여 적재행렬의 각 열에 평활제약(smoothing restriction)을 부과한다. Nelson and Siegel(1987)은 선도금리곡선(forward curve)을 지수적 감쇠(exponential decay)를 포함한 다항식으로 가정할 때의 수익률곡선을 제시했는데, 이를 DFM 형태로 확장한 Diebold and Li(2006)의 동태적 Nelson-Siegel모형은 다른 모형들보다 상대적으로 우수한 예측력을 보여 각국 중앙은행 등에서 실무에 널리 사용되고 있다. 한편 Bowsher and Meeks(2008)은 수익률곡선을 선택된 일부 잔존만기에서의 이론적인 수익률을 매듭(knot)으로 하는 3차 스플라인곡선(cubic spline curve)으로 가정한 FSM(functional signal plus noise)모형 기반의 DFM을 제시하였다. 이 모형을 기초로 Almeida et al.(2018)은 구간별 스플라인곡선을 일반화시킨 분리기간구조모형(segmented term structure model)을, Jungbacker et al.(2014)는 일부 잔존만기의 공통요인 수준에서의 이론적인 수익률을 매듭으로 하는 평활동태요인모형(smooth DFM, SDFM)을 발전시켰다.

Ⅲ. 분석자료 및 실증분석 모형

1. 분석자료

이 논문의 연구는 한국자산평가의 일별 국고채 수익률 자료로부터 얻은 2001년 1월부터 2022년 12월까지의 월평균을 사용한다. 앞 장에서 언급했듯 VECM에 지나치게 많은 기간별 이자율을 포함시키면 과적합이 발생하므로 3,12,36,120개월 이자율만을 대상으로 원자료를 로그수익률로 변환하여 사용한다.¹³⁾

그림 1은 표본기간 동안 기간별 이자율의 변화를 보여주며, 음영으로 처리된 5개의 기간은 저점을 포함한 경기수축 국면을 나타낸다.¹⁴⁾ 이 그림은 장단기금리차가 경기수축에 앞서 축소되고 경기확장에 앞서 확대되는 경향이 분명하지 않음을 보여준다. 다만 글로벌 금융위기 당시 경기수축 국면(2008.2~2009.2)과 마지막 경기수축 국면(2017.10~2020.5)에서 이에 대응한 확장적 통화정책에 의해 단기금리가 급락하면서 장단기금리차가 확대되고 이후 경기가 확장 국면에 진입하는 모습은 분명하게 나타난다.

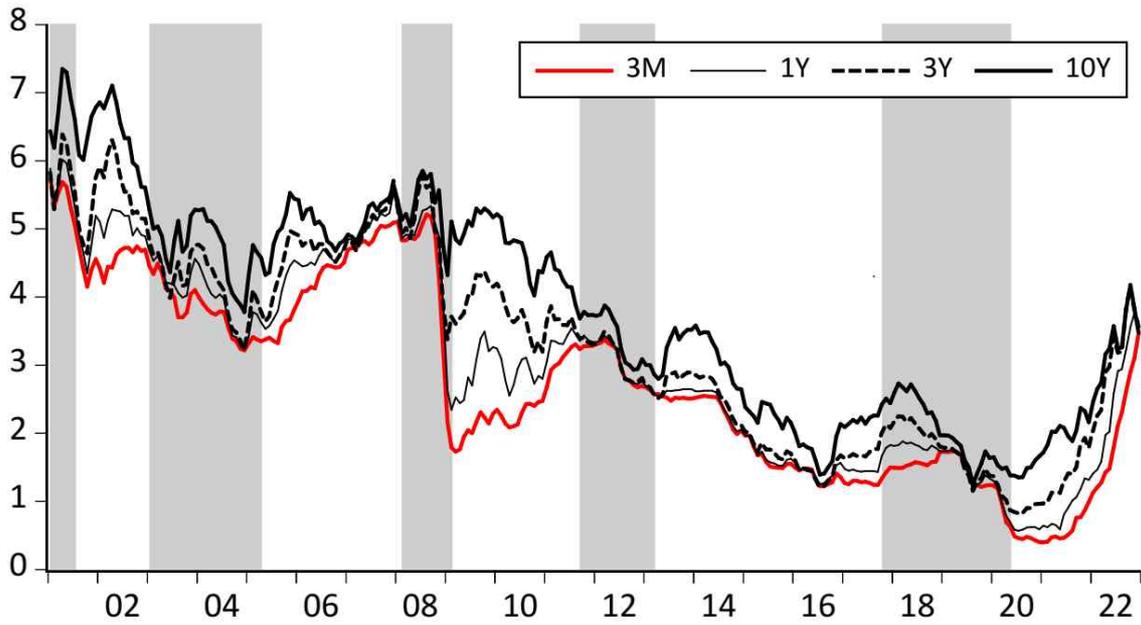
그림 2는 표본기간 동안 장단기금리차의 변화를 보여주며, 음영으로 처리된 6개의 기간은 국내 금융시장에 심각한 불안을 초래했다고 판단되는 ① 대우자동차 부도(2000.9~2001.4) ② 이라크 전쟁 발발과 SARS 사태(2002.12~2003.8) ③ 글로벌 금융위기(2008.6~2009.3) ④ 유럽 금융위기(2011.7~2011.11) ⑤ 미·중 무역전쟁(2018.9~2019.2) ⑥ 코로나19 사태(2020.2~2020.5) 기간을 나타낸다.¹⁵⁾ 이 그림은 금융불안 자체보다는 이로 인한 경기침체 우려, 이에 대응한 통화신용정책의 결과가 장단기금리차를 변화시킨다는 것을 보여준다.

13) 모든 잔존만기의 국고채 거래가 매일 발생하지는 않으므로 일별 자료 중 일부는 부스트랩(bootstrap)으로 생성된 것이지만, 1,3,10년 이자율 자료의 월평균은 한국은행 경제통계시스템의 자료와 차이가 거의 없다.

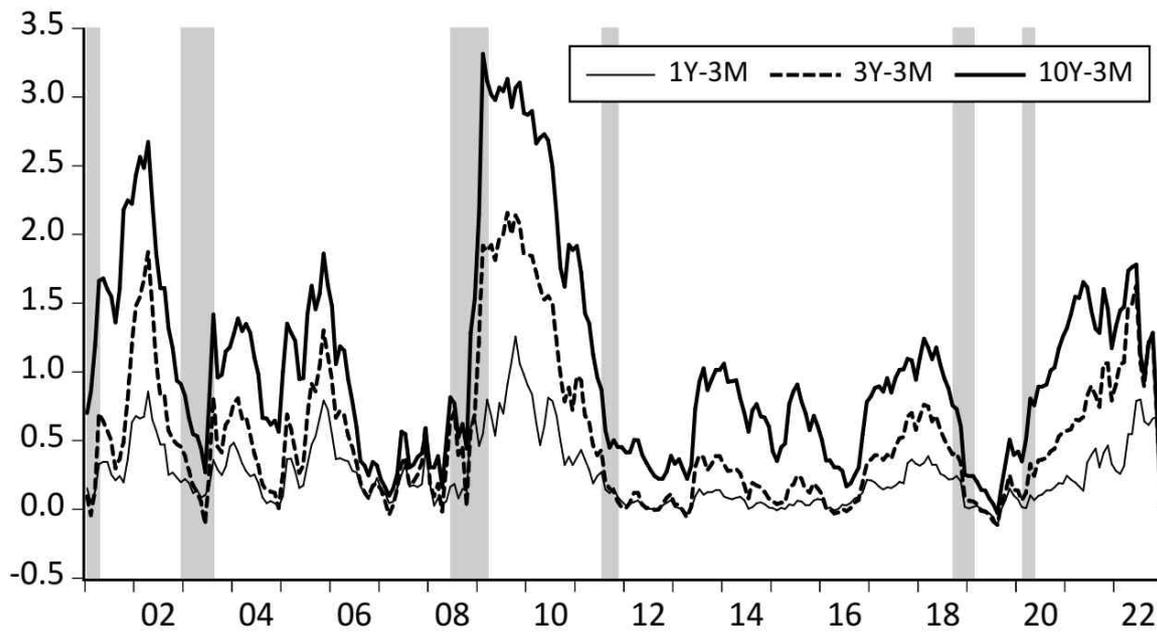
14) 마지막 경기정점(2017.9)과 경기저점(2020.5)은 잠정적인 설정이다.

15) 이들 사건과 발생 시기는 FnGuide의 선정에 따른 것이다. 각 사건에 대한 자세한 내용은 <http://www.fnindex.co.kr/overview/I/FSI>에서 확인할 수 있다.

[그림 1] 기간별 이자율의 변화



[그림 2] 장단기금리차의 변화



2. 실증분석 모형

이 논문의 연구는 장단기금리차의 공적분을 이용한 Hall et al.(1992)의 VECM을 사용하여 다수의 장기금리를 동시에 분해한다.

분석대상인 단기를 $\tau_1 = h$ 기간, 장기를 $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_N \in \mathbb{N}_h$ 기간이라고 할 때, t 기의 기간별 이자율 $y_{\tau,t}, \tau \in \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$ 를 순서대로 포함한 N 차원 열벡터를 y_t , 해당 기의 장단기금리차 $s_{n,t}, n \in \mathbb{N}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_N\}$ 를 순서대로 포함한 $N-1$ 차원 열벡터를 s_t 라고 하면, Hall et al.(1992)의 모형은 다음과 같다.

$$\Delta y_t = \sum_{k=1}^{p-1} \Gamma_k \Delta y_{t-k} + G(s_{t-1} - c) + \sum_{k=0}^q \Theta_k \epsilon_{t-k} \quad (5)$$

여기서 ϵ_t 는 N 차원 벡터백색잡음(vector white noise)이며, c 는 $n \in \mathbb{N}^*$ 기간 기간프리미엄의 장기균형수준 c_n 을 순서대로 포함한 $N-1$ 차원 열벡터이다.

Kim(2012)에 의하면, 식 (5)의 VECM은 관측상 동일한 N 차원 VARMA(vector autoregressive moving average)(p, q)모형

$$z_t = \sum_{k=1}^p \Psi_k z_{t-k} + \sum_{k=0}^q \Xi_k u_{t-k}, \quad z_t \stackrel{\text{def}}{=} [\Delta y_{h,t} (s_t - c)']' \quad (6)$$

로 변환할 수 있다(부록 B 참조). 즉 Campbell and Shiller(1987,1991)의 VAR모형은 이러한 VECM 가운데 장기금리를 하나만 포함하고 오차항이 백색잡음인 가장 단순한 경우에 해당한다.

다기간 미래에 대한 예측을 간편하게 계산하기 위해 식 (6)의 VARMA모형을 다시 Jp 차원 VAR(1)모형의 형태

$$\zeta_t = A\zeta_{t-1} + Hw_t \quad (7)$$

로 나타내면, t 기의 ζ_{t+k} 에 대한 합리적 기대는 $\mathbb{E}_t \zeta_{t+k} = A^k \zeta_t$ 이다. 여기서

$$\zeta_t \stackrel{\text{def}}{=} [z_t' \ z_{t-1}' \ \cdots \ z_{t-p+1}']', \quad w_t \stackrel{\text{def}}{=} [u_t' \ u_{t-1}' \ \cdots \ u_{t-q}']'$$

이다. 이제 e_k 를 k 번째 요소가 1인 \mathbb{R}^p 의 표준기저벡터(standard-basis vector)라고 하면, 식 (4)에 의해

$$\mathbb{E}_t S_{n,t} = e_1' A_n \zeta_t, \quad A_n \stackrel{\text{def}}{=} A \left[I - \frac{\hbar}{n} (I - A^n) (I - A^\hbar)^{-1} \right] (I - A)^{-1} \quad (8)$$

이며, $n \in \mathbb{N}^*$ 기간 장기금리의 t 기 기간프리미엄은

$$TP_{n,t} = s_{n,t} - \mathbb{E}_t S_{n,t} = [e_n' - e_1' A_n] \zeta_t + c_n \quad (9)$$

에 의해 얻어진다.

약한 형태의 기대가설은 장기금리의 기간프리미엄이 0이 아니더라도 일정한 상수라는 가설이다. 따라서 이 가설이 성립하려면 식 (9)에서 $e_n' = e_1' A_n$ 이 성립해야 한다. 이 논문의 연구에서는 이를 검정하기 위해 Campbell and Shiller(1991)의 제안을 따라 각각의 $n \in \mathbb{N}^*$ 에 대해 다음의 회귀방정식을 추정한다.

$$s_{n,t} = \alpha + \beta \mathbb{E}_t S_{n,t} + \varepsilon_t \quad (10)$$

약한 형태의 기대가설이 성립하려면 $\beta = 1$ 이라고 할 수 있어야 하며, 이는 Wald 검정을 통해 확인할 수 있다.

이 연구에 사용된 자료는 $h = 3$, $\mathbb{N}^* = \{12, 36, 120\}$ 인 경우이다. 또한 단위근 검정(unit root test) 결과 모든 $\tau \in \{3, 12, 36, 120\}$ 에 대해 이차율 $y_{\tau,t}$ 는 1차 적분된 시계열인 반면, 모든 $n \in \mathbb{N}^*$ 에 대해 장단기금리차 $s_{n,t}$ 는 안정적인 시계열로 볼 수 있어¹⁶⁾ 미국 국채수익률 자료처럼 VECM을 사용하여 분석할 수 있다.

이 연구의 실증분석에서는 모형에 상수항을 추가하고 AIC(Akaike Information Criterion)를 기준으로 시차를 $p = 3$ 으로 설정한다. 또한 오차항은 백색잡음으로 가정한다. 즉 실증분석에 사용된 VECM은

$$\Delta y_t = \gamma + \sum_{k=1}^2 \Gamma_k \Delta y_{t-k} + G(s_{t-1} - c) + \epsilon_t \quad (11)$$

이다. 실제 추정은 이와 관측상 동등한 4차원 VAR모형

$$z_t = \psi + \sum_{k=1}^3 \Psi_k z_{t-k} + u_t \quad (12)$$

을 사용하여 이루어지며, 이 때 장단기금리차 s_t 의 전체기간 표본평균을 c 에 대한 추정치로 사용한다. 이 모형을

$$z_t - \mu = \sum_{k=1}^3 \Psi_k (z_{t-k} - \mu) + u_t \quad (13)$$

16) ADF(Augmented Dickey-Fuller) 검정에 의하면 모든 τ 에 대해 $y_{\tau,t}$ 가 단위근을 가진다는 가설은 10% 유의수준에서도 기각할 수 없지만, $\Delta y_{\tau,t}$ 가 단위근을 가진다는 가설은 1% 유의수준에서도 기각할 수 있다. 또한 모든 n 에 대해 $s_{n,t}$ 가 단위근을 가진다는 가설은 1% 유의수준에서도 기각할 수 있다.

형태로 변환하여, ζ_t 에 z_t 대신 $z_t - \mu$ 를 포함시키면 앞서 언급한 방법으로 장기금리의 기간프리미엄을 도출하고 기대가설을 검정할 수 있다. 이 경우 식 (9)는

$$TP_{n,t} = [e_n' - e_1' A_n] \zeta_t + c_n + \mu_n \quad (14)$$

로 변형된다. 여기서 μ_n 은 z_t 의 원소 $s_{n,t} - c_n$ 에 상응하는 벡터 μ 의 원소이다.

한편 Bai and Perron(2003)이 제안한 방법으로 각 기간스프레드의 평균에 대해 분기점(breakpoint) 검정을 실시하면, 오차항의 자기상관(autocorrelation)을 허용하는 경우,¹⁷⁾ 5% 유의수준에서 분기점이 없다고 할 수 있다. 따라서 전체 표본 기간을 하나의 VECM으로 분석해도 문제가 없는 것으로 판단된다.

17) 이 검정에서는 VECM에서 공적분 부분만 추정하므로 이를 허용할 필요가 있다. 이 연구에서는 2차식의 분광커널(quadratic spectral kernel)이 사용되었으며, 커널의 대역폭(bandwidth)은 Andrews의 AR(1) 방법에 의해 자동으로 선정되었다.

IV. 실증분석 결과

먼저 식 (12)의 VAR모형을 추정한 결과가 [표 1]에 제시되어 있다. 식 (14)에서 ξ_t 의 (비조건부)기댓값은 0이므로 $n \in \mathbb{N}^*$ 기간 장기금리 기간프리미엄의 장기적인 평균은 $c_n + \mu_n$ 이다. 이를 통해 1,3,10년물 국채의 3개월물 대비 기간프리미엄은 각각 장기평균 0.215%, 0.435%, 0.889%를 중심으로 변동함을 확인할 수 있다.

[표 1] VAR모형의 모수 추정치

	Ψ_1				Ψ_2			
	3개월	1년	3년	10년	3개월	1년	3년	10년
3개월	0.665	-0.506	0.361	-0.125	-0.055	0.296	-0.223	0.179
1년	0.142	0.768	-0.042	0.258	-0.093	-0.100	0.138	-0.262
3년	-0.062	-0.348	1.007	0.230	-0.102	0.629	-0.432	-0.039
10년	-0.247	-0.381	-0.044	1.277	-0.165	0.813	-0.270	-0.287
	Ψ_3				ψ	c		
	3개월*	1년	3년	10년				
3개월	0	0.037	0.079	-0.128	-0.0031	-		
1년	0	-0.082	0.034	0.030	0.0001	0.2540		
3년	0	-0.467	0.330	-0.094	-0.0026	0.5247		
10년	0	-0.606	0.304	0.033	-0.0088	1.0442		

주) Kim(2012)에 의하면, VECM을 VAR모형으로 적절하게 전환하기 위해서는 *로 표시한 열에 해당하는 벡터가 영벡터라는 제약이 부과되어야 한다(부록 B 참조).

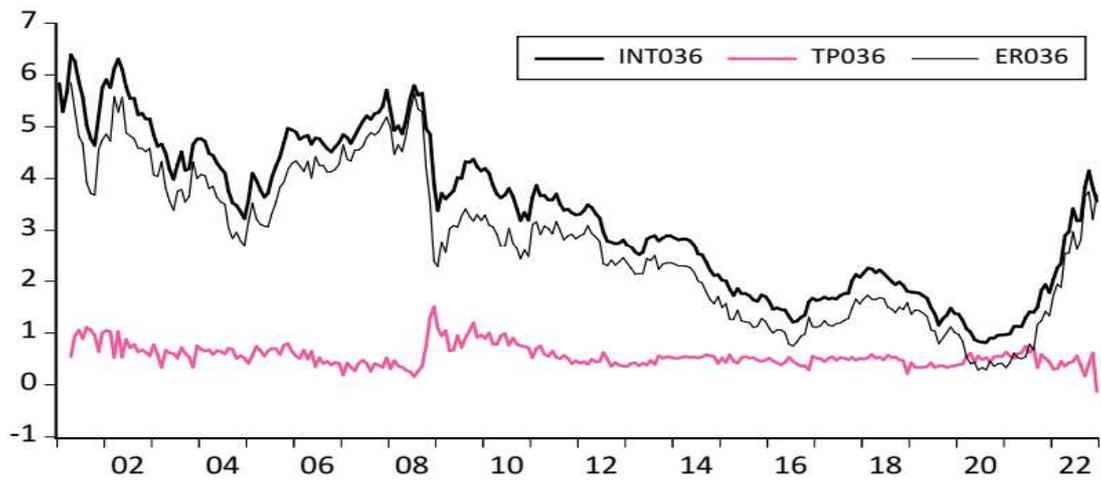
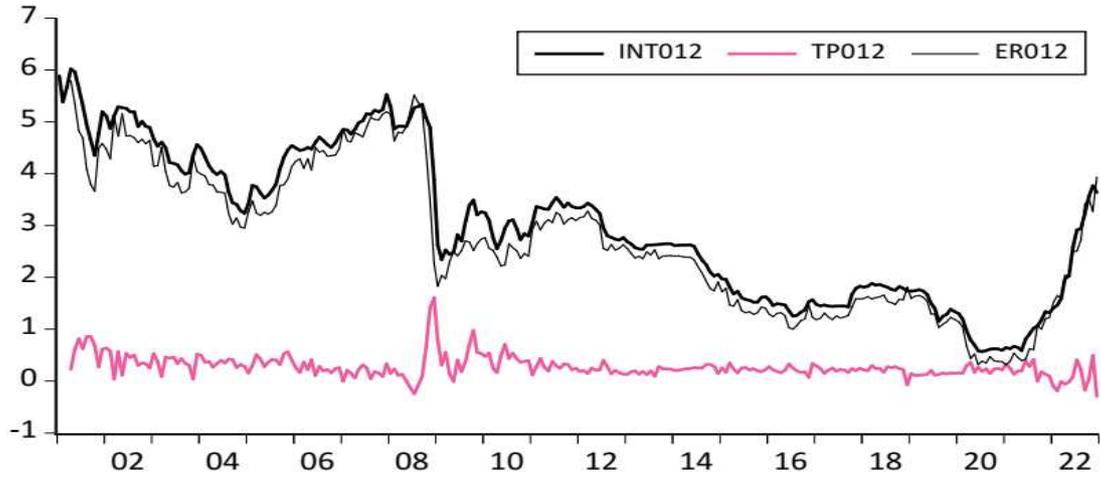
그림 3은 1,3,10년물 국채수익률(INT)를 3개월물 대비 기간프리미엄(TR)과 기대가설로 설명되는 부분(ER)으로 분해한 결과를 보여준다. 약한 형태의 기대가설에 대한 Wald 검정 결과, 1,3,10년물 국채수익률 모두 $\beta = 1$ 이라는 귀무가설을 1% 유의수준에서도 기각할 수 있어 기대가설이 약한 형태로라도 성립한다고 보기는 어렵다. 하지만 이들 기간프리미엄은 상당히 안정적인 모습을 보여 우리나라 중·장기금리 변화의 대부분은 기대가설에 의해, 즉 미래 단기금리의 변화에 대한 투자자들의 예측에 의해 설명되는 것으로 나타났다.

다만 Bai and Perron(2003)의 방법으로 각 기간프리미엄의 평균에 대해 분기점 검정을 실시하면, 오차항의 자기상관을 허용하지 않을 경우, 3~4개의 분기점이 있는 것으로 나타나는데, 이 분기점은 같은 방식으로 얻을 수 있는 각 기간기간스프레드의 분기점과 일치한다. 이는 기간스프레드가 일정기간 확대된 수준을 유지할 때는 기간프리미엄 역시 상대적으로 높은 수준을 유지함을 의미한다.¹⁸⁾

한편 10년물 국채 수익률의 기간프리미엄은 단기금리가 급락할 때 급등하고 단기금리가 급등할 때 급락하는 모습이 뚜렷하게 나타나며, 이러한 급등 혹은 급락에 앞서 완만하게 하락하거나 상승하는 모습을 보인다. 이는 추정된 기간프리미엄이 장단기금리차의 불균형오차에 기인하며 그 변화가 이러한 오차를 수정하는 방향으로 이루어지기 때문인 것으로 판단된다.

18) 이 가능성을 지적해 준 익명의 심사자에게 감사드린다. 기간프리미엄에 대한 분기점 검정에서도 오차항의 자기상관을 허용할 필요가 있으며, 이를 허용하는 경우, 5% 유의수준에서 분기점이 없다고 할 수 있다. 즉 기간스프레드와 마찬가지로 기간프리미엄에도 엄밀한 의미에서의 구조적 단절(structural break)은 존재하지 않는다. 오차항의 자기상관을 허용하지 않을 때의 검정 결과는 표면적으로 나타나는 현상에 대한 기술이다.

[그림 3] 우리나라 국채의 수익률 분해



V. 결론

1. 요약 및 한계점

이 논문은 기대가설의 검정에 일반적으로 사용되는 공적분 분석을 이용하여 우리나라 1,3,10년물 국채의 수익률을 3개월물 국채의 수익률 대비 기간프리미엄과 기대가설에 의해 설명되는 부분으로 분해했다.

이 분석을 통해 약한 형태의 기대가설을 검정한 결과, 기대가설이 약한 형태라도 성립한다고 보기는 어려웠다. 하지만 이 분석을 통해 추정한 우리나라 중·장기금리의 기간프리미엄은 상당히 안정적인 모습을 보여 우리나라 중·장기금리 변화의 대부분은 기대가설에 의해, 즉 미래 단기금리의 변화에 대한 투자자들의 예측에 의해 설명되는 것으로 나타났다. 다만 기간스프레드가 일정기간 확대된 수준을 유지할 때는 기간프리미엄 역시 상대적으로 높은 수준을 유지하는 경향이 있다.

이 논문의 연구에서 추정된 기간프리미엄의 변화는 장단기금리차에서 나타나는 불균형오차를 해소하기 위한 오차수정과정에서 발생하는 것이므로 이 논문의 결과를 이자율 기간구조에 대한 이론으로 설명하기는 어려우며, 보다 다양한 이자율 기간구조 모형을 이용한 후속 연구가 필요할 것으로 판단된다. 하지만 이 논문의 연구를 통해 이러한 후속 연구의 결과와 비교할 수 있는 기본적인 모형에서의 결과를 얻었다고 할 수 있다.

2. 미래사회에 대한 시사점

금융위기와 같은 이례적인 상황을 포함하여 거시경제에 발생하는 다양한 현상에 대응하기 위해서는 주식, 채권, 부동산 등 각종 자산의 가격이 결정되는 원리를 이해할 필요가 있다. 정보통신기술의 발달로 쏠림현상(herd behavior)이 심화되고 고령화로 인해 자산수익에 대한 의존도가 높아지는 미래사회에서는 이러한 이해의 필요성이 더욱 증대될 것으로 예상된다.

대부분 자산에 대해 투기수요(speculative demand)의 비중이 크다는 점을 고려할 때, 현재의 자산가격을 결정하는 핵심요인은 미래의 해당 자산가격에 대한 투

자자들의 예측이며, 이 논문은 장기금리를 분해하여 미래의 채권가격에 대한 투자자들의 예측을 추출하는 방법에 대해 연구하였다. 따라서 이 논문은 미래 자산가격에 대한 채권투자자들의 예측에 대해 연구함으로써 미래사회의 불확실성 해소에 어느정도 도움이 된다고 할 수 있다.

참고문헌

- 서병선, 2000. 기대가설과 이자율 기간구조의 비선형조정과정.
경제학연구, 제48집 제1호, pp.63-83.
- 김기호, 2014. 비대칭 금리기간구조에 대한 실증분석. BOK 경제연구 제 2014-12호. 한국은행 경제연구원.
- Ahn, D.-H., Dittmar, R.F. and Gallant, A.R., 2002. Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence. *Review of Financial Studies*, 15(1), pp.243-288.
- Almeida, C., Ardison, K., Kubudi, D., Simonsen, A. and Vicente, J., 2018, Forecasting Bond Yields with Segmented Term Structure Models. *Journal of Financial Econometrics*, 16(1), pp.1-33.
- Ang, A. and Piazzesi, M., 2003. A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables. *Journal of Monetary Economics*, 50(4), pp.745-787.
- Bai, J. and Perron, P., 2003. Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models. *Journal of Applied Econometrics*, 18(1), pp.1-22.
- Bowsher C.G. and Meeks, R., 2008. The Dynamics of Economic Functions: Modeling and Forecasting the Yield Curve. *Journal of the American Statistical Association*, 103(484), pp.1419-1437.
- Campbell, J.Y. and Shiller, R.J., 1987. Cointegration and Tests of Present Value Models. *Journal of Political Economy*, 95(5), pp.1062-1088.
- Campbell, J.Y. and Shiller, R.J., 1991. Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View. *Review of*

- Economic Studies*, 58(3), pp.495-514.
- Cheridito, P., Filipovic, D. and Kimmel, R.L., 2007. Market price of Risk Specifications for Affine Models: Theory and Evidence. *Journal of Financial Economics*, 83(1), pp.123-170.
- Clarida R.H., Sarno L., Taylor M.P. and Valente G., 2006. The Role of Asymmetries and Regime Shifts in the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Business*, 79(3), pp.1193-1224.
- Dai, Q. and Singleton, K.J., 2000. Specification Analysis of Affine Term Structure Models. *Journal of Finance*, 55(5), pp.1943-1978.
- Dai, Q., Singleton, K.J., and Yang, W., Regime Shifts in a Dynamic Term Structure Model of U.S. Treasury Bond Yields, *Review of Financial Studies*, 20(5), pp.1669-1706.
- Diebold, F.X. and Li, C., 2006. Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, 130(2), pp.337-364.
- Duffie, D. and Kan, R., 1996. A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance*, 6(4), pp.379-406.
- Duarte, J., 2004. Evaluating an Alternative Risk Preference in Affine Term Structure Models. *Review of Financial Studies*, 17(2), pp.379-404.
- Enders, W. and Granger, C.W.J., 1998. Unit-Root Tests and Asymmetric Adjustment with an Example Using the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(3), pp.304-311.
- Evans, M.D.D. and Lewis, K.K., 1994. Do stationary risk premia explain it all?: Evidence From the Term Structure. *Journal of Monetary Economics*, 33(2), pp.285-318.

- Fama, E.F. and Bliss, R.R., 1987. The Information in Long-Maturity Forward Rates. *American Economic Review*, 77(4), pp.680-692.
- Hall, A.D., Anderson, H.M. and Granger, C.W.J., 1992. A Cointegration Analysis of Treasury Bill Yields. *Review of Economics and Statistics*, 74(1), pp.116-126.
- Jungbacker, B., Koopman, S.J. and van der Wel, M., 2014. Smooth Dynamic Factor Analysis with Application to the US Term Structure of Interest Rates. *Journal of Applied Econometrics*, 29(1), pp.65-90.
- Kim, Y.-Y., 2012. Stationary Vector Autoregressive Representation of Error Correction Models. *Theoretical Economics Letters*, 2(2), pp.152-156.
- Nelson, C.R. and Siegel, A.F., 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, 60(4), pp.473-489.

부록 A: 선도금리의 위험프리미엄과 기간프리미엄

본 부록에서는 본문에서 정의한 기간프리미엄이 미래에 기대되는 단기금리에 대한 해당 기간 선도금리(forward rate)의 위험프리미엄(risk premium)을 장기금리의 대출기간 전체에 걸쳐 평균한 것과 같음을 보인다.

먼저 τ 기간 후에 액면금액이 1원이고 만기가 h 기간 남은 할인채를 매입하기로 약정하는 것은 액면금액이 1원이고 만기가 $\tau+h$ 기간 남은 할인채를 매입하면서 동시에 이 할인채의 가격이 액면금액이고 만기가 τ 기간 남은 할인채를 매도하는 것과 동등하다. 따라서 $t+\tau$ 기부터 h 기간 대출에 대한 t 기의 선도금리는

$$rf_{\tau,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} (\ln P_{\tau,t} - \ln P_{\tau+h,t})$$

이며, 해당 선도금리의 위험프리미엄은 t 기에 기대되는 $t+\tau$ 기의 h 기간 이자율에 대한 초과수익률 $rp_{\tau,t} \stackrel{\text{def}}{=} rf_{\tau,t} - \mathbb{E}_t y_{h,t+\tau}$ 로 정의된다. 한편 만기가 $n \in \mathbb{N}_h$ 기간 남은 채권의 만기수익률은 다음과 같이 선도금리를 평균한 것과 같다.

$$y_{n,t} = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} rf_{jh,t} \quad (15)$$

따라서 $t, t+h, t+2h, \dots, t+n-h$ 기의 h 기간 대출에 대한 t 기 선도금리의 위험프리미엄을 평균하면

$$\frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} rp_{jh,t} = y_{n,t} - \mathbb{E}_t R_{n,t} \quad (16)$$

이며, 식 (2)는 이 평균이 본문에서 정의한 기간프리미엄과 같다는 것을 보여준다.

부록 B: VECM의 변환

본 부록에서는 본문 식 (5)의 모형을 식 (6)의 모형으로 변환하는 과정을 보인다.

먼저 $y_t^* \equiv y_t - [0 \mu']'$ 라고 하면, 식 (5)의 모형은 다음과 같은 표준적인 형태의 VECM이 된다.

$$\Delta y_t^* = \Gamma y_{t-1}^* + \sum_{k=1}^{p-1} \Gamma_k \Delta y_{t-k}^* + \sum_{k=0}^q \Theta_k \epsilon_{t-k} \quad (17)$$

여기서 $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} G[-i_{N-1} I_{N-1}]$, i_{N-1} 는 1만으로 이루어진 $N-1$ 차원 열벡터이다. 또한 $\Pi_1 \stackrel{\text{def}}{=} I_N + \Gamma + \Gamma_1$, $\Pi_p \stackrel{\text{def}}{=} -\Gamma_{p-1}$, $\Pi_k \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_k - \Gamma_{k-1}$, $2 \leq k \leq p-1$ 로 정의하면, 식 (17)의 VECM은 1차 적분된 VARMA 형태

$$y_t^* = \sum_{k=1}^p \Pi_k y_{t-k}^* + \sum_{k=0}^q \Theta_k \epsilon_{t-k} \quad (18)$$

로 변환할 수 있다. 이제 $s_t \stackrel{\text{def}}{=} [y_{h,t}^* s_t - \mu]'$ 로 정의하고,

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i_{N-1} & I_{N-1} \end{bmatrix}$$

라고 하면, $s_t = T y_t^*$ 이므로, 식 (18)을

$$s_t = \sum_{k=1}^p \Pi_k^* s_{t-k} + \sum_{k=0}^q \mathcal{E}_k u_{t-k} \quad (19)$$

로 변환할 수 있다. 여기서 $\Pi_k^* \stackrel{\text{def}}{=} T \Pi_k T^{-1}$, $\mathcal{E}_k \stackrel{\text{def}}{=} T \Theta_k T^{-1}$, $u_\tau \stackrel{\text{def}}{=} T \epsilon_\tau$ 이다. 이제

$$\Gamma_k^* \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{j=k+1}^p \Pi_j^*, \quad k = 1, 2, \dots, p-1$$

라고 하고, Γ_k^* 의 첫 번째 열벡터를 $\Gamma_{k,1}^*$, 나머지 부분행렬을 $\Gamma_{k,2}^*$ 로 나타내자. 또한 G_1 을 G 의 첫 번째 행벡터라고 하고, $\Gamma^* \equiv [G_1' \Gamma + I_{N-1}]'$ 로 정의하자. 이제

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Gamma_{1,1}^* & \Gamma^* + \Gamma_{1,2}^* \end{bmatrix}, \\ \Psi_k &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Gamma_{k,1}^* & \Gamma_{k,2}^* - \Gamma_{k-1,2}^* \end{bmatrix}, \quad 2 \leq k \leq p-1, \\ \Psi_p &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & -\Gamma_{p-1,2}^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

라고 하면, 식 (19)가 식 (6) 형태로 변환된다. 여기서 Ψ_p 의 첫 번째 열은 영벡터인데, 이는 식 (6)의 VARMA모형에 해당 제약이 부과되어야 함을 의미한다.

A Cointegration Analysis for Estimating Term Premia in the Korean Treasury Bond market

Jae Eun Song*

Abstract

We use a vector error correction model to decompose Korean treasury bond yields into expected short-term rate and term premium components. This decomposition finds that the yield movements have tended to reflect changes in expected short-term rates rather than in the premia. This means that the estimated premium is fairly stable over time though large term spreads over a significant length of period are associated with high term premia. However the Wald test rejects even the weak form of expectation hypothesis.

Key word : term spread, term premium, yield decomposition

* Senior Researcher, Nam Duck-Woo Economic Research Institute of Sogang University, jesong@sogang.ac.kr