옵션價格決定理論에 관한 考察

金 炳 淳 *

目 次

Ⅰ. 序 言

옵션(option)은 一般的인 資産證券과는 성격이 다른 派生的 資産으로서 滿期日에 있어서 基礎證券(underlying security)의 價格에 따라 利得의 크기가 결정되는 條件附請求權(contingent claim) 이다. 이러한 옵션의 評價理論이 最近에 들어 財務管理의 各 分野에서 중요시 되고 있는 것은 대부분의 財務資産들이 實質的으로는 條件附請求權이라고 할 수 있기 때문이다.

옵션去來는 世界의 여러 金融中心地의 場外市場에서 옵션仲介人이나 賣買者에 의하여 오래전부터 이루어졌었다. 그러나, 옵션去來가 證券去來에 일대 變革을 일으키면서 關心을 집중시킨 것은 1973年 4月에 시카고옵션去來所(Chicago Board of Options Exchange ; CBOE)가 開場되면서부터 이다. CBOE는 標準化된 옵션契約을 거래하는 최초의 組織化된 市場으로 5年도 채 안되어 去來日마다 千萬株 이상을 賣買할 수 있는 옵션이 去來되는

* 本 硏究所 硏究員, 社會科學大 經營學科 助敎授.

急伸張을 하였다.[1] 이와 더불어 옵션의 評價에 대한 理論的 硏究도 1973年 5月에 블랙과 숄즈(F. Black and M. Scholes)가 「옵션의 價格決定과 企業負債」라는 論文에서 옵션價格決定에 관한 一般均衡模型을 導出한 以來 급속히 發展하여 왔다. 이러한 옵션가격결정모형(Option Pricing Model ; OPM)은 옵션價格의 評價뿐만 아니라 企業의 資本構造, 投資政策, 企業合倂과 吸收, 株式分割 및 配當政策 등 기업의 제반 재무정책에 대하여도 示唆해 주는 바가 크기 때문에 企業의 財務管理者들도 옵션評價에 많은 노력을 傾注하고 있다.[2]

우리나라에는 아직 組織化된 옵션市場은 없다. 그러나 普通株로 전환할 수 있는 權利를 부여한 轉換社債가 여러 企業에 의해 성공적으로 發行된 적이 있으며 1984年 改正된 商法에서는 新株引受權附社債의 發行도 許容하였다. 그리고 新株引受權附社債를 발행하였을 경우, 新株引受權을 행사하려는 자의 청구에 따라 會社는 新株引受權 證券을 발행하여야 하며 이 新株引受權 證券은 讓渡가 가능하도록 하였다. 이와 같은 新株引受權이나 轉換權이 原來의 옵션과는 다르나 廣義로 보면 옵션의 한 形態라고 할 수 있다. 따라서 理論的인 측면은 물론 實際的인 측면에서도 OPM에 대한 硏究는 필요하다 하겠다.

따라서, 本稿에서는 옵션市場의 構造와 去來戰略을 살펴본 후 OPM 導出을 위한 諸接近方法과 實證的 硏究를 考察하고 이어서 OPM의 擴張과 活用에 대하여 硏究하고자 한다.

Ⅱ. 옵션市場의 構造와 去來戰略

옵션은 約定된 期間동안에 明示된 價格으로 特定資産을 사거나 팔 수 있는 權利만을 부여하고 있다. 이와 같이 옵션은 特定資産을 사거나 팔 수 있는 權利만을 부여하고 있지 義務를 부과하지 않는다는 점에서 餘他의 契約과는 뚜렷한 差異가 있다.

옵션去來는 극히 專門的인 일로 그 去來形態나 去來對象이 계속 多樣化되고 있으며 使用되는 用語 또한 特殊하다. 그러나 기본적으로는 買入할 수 있는 權利로서의 콜 옵션(call option)과 賣渡할 수 있는 權利로서의 풋 옵션(put option)의 두 가지가 있으며 權利에

1) R. Brealey & S. Myers, *Principle of Corporate Finance*, McGraw-Hill Book Co., 1981, p. 422.

2) T. E. Copeland & J. F. Weston, *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Wesley Publishing Co., 1983, p. 275.

대한 代價를 옵션價格(option price 또는 option premium)이라 하고 契約對象이 되는 資産을 基礎證券(underlying security), 基礎證券에 대한 約定價格을 行使價格(exercise price 또는 striking price)이라 하며 옵션이 행사되는 기간을 나타내는 指定된 날자를 滿期日(expiration date 또는 maturity)이라고 한다. 特히 滿期日에만 行使할 수 있는 옵션을 유로피언 옵션(European option), 滿期日을 포함하여 그 이전 어느 날자이건 옵션所有者의 의사에 따라 行使가 가능한 옵션을 아메리칸 옵션(American option)이라고 한다. 또한 옵션은 옵션의 發行者(writer)가 基礎證券을 所有하고 있는 경우에는 covered 옵션, 소유하고 있지 않은 경우에는 naked 옵션이라고 한다. 以外에 滿期日에 있어서 基礎證券價格과 行使價格을 비교하여 out - of - the - money, in-the-money, at - the - money로 區分하는데, 이를 위해 滿期 T時點에서의 콜 옵션과 풋 옵션의 價値를 式으로 表示하면 다음과 같다.

$$C_T = max\,[0,\ S_T - K]$$
$$P_T = max\,[0,\ K - S_T]$$

C_T, P_T : 各各 滿期에 콜 옵션, 풋 옵션의 價値

S_T : 滿期에 基礎證券價格

K : 行使價格

이 式에서 콜 옵션의 경우 滿期에 基礎證券價格이 行使價格 以下이면($S_T \leq K$) 콜 옵션은 行使되지 않고 그 價値도 없는데 이러한 옵션을 out - of - the - money 라고 한다. (풋 옵션의 경우에는 $S_T \geq K$).

反面에 滿期에 옵션의 價値가 0보다 크면(콜 옵션은 $S_T > K$, 풋 옵션은 $S_T < K$) 옵션所有者는 權利를 行使하는데 이러한 경우는 in - the - money라고 한다. 이때에 基礎證券價格과 行使價格과의 差額을 本質的 價値(intrinsic value)라고도 부른다. 基礎證券價格과 行使價格간의 이러한 관계는 옵션의 存續期間동안에도 使用되는데 基礎證券價格이 行使價格에 接近할 때 마다 이를 at - the - money라고 한다.[3)]

以上에서 옵션의 槪念과 옵션去來에 特有한 몇 가지 用語를 살펴 보았다. 그러면 옵션市

3) R. A. Jarrow & A. Rudd, *Option Pricing*, Richard D. Irwin, Inc., 1983, pp. 13-16.

場의 現況과 投資對象으로서 옵션의 去來戰略을 알아 보기로 하겠다.

1. 옵션市場의 現況

옵션去來가 現代的 意味의 組織化된 市場에서 最初로 이루어진 것은 CBOE에서 이다. CBOE는 去來量이 많은 16個 普通株에 대한 콜 옵션으로 시작하여 開場 다음해인 1974年末에는 미국에서 두 번째 규모인 아메리칸證券去來所(American stock exchange)의 去來를 능가하는 急伸張을 하였다. 이후 아메리칸證券去來所, 필라델피아證券去來所, 패시픽證券去來所(Pacific stock exchange) 등에서도 옵션去來가 실시되었다. 옵션去來가 各 證券去來所로 擴散됨에 따라 1982年 10月末 現在 美國에서만 360여종의 株式옵션이 上場되었고 이들 株式옵션에 대해 9,500여개의 相異한 옵션契約이 이루어지고 있었다.

이러한 옵션去來는 유럽으로도 擴散되어 네델란드의 암스텔담에 있는 유럽 옵션去來所(European option exchange)에서는 15個 普通株, 金 및 4個의 네델란드政府債가 上場되어 옵션去來가 이루어졌으며, 런던證券去來所에서는 普通株뿐만 아니라 商品에 대한 옵션去來도 실시되었다. 以外에 호주 등 몇 개의 金融地에서도 비록 規模는 작지만 옵션去來가 活潑히 이루어졌다.

CBOE 開場이후 옵션去來가 急伸張한 것은 옵션契約을 標準化시킨데에서 그 要因을 찾을 수 있다. 標準化의 形態는 (1) 옵션行使價格의 細目化 : 이는 옵션의 行使價格을 株價가 \$ 50 以下인 경우에는 \$ 5의 간격을 두고 最低行使價格을 \$ 10로 制限하였다. 한편 株價가 \$ 50초과～\$ 200인 경우에는 \$ 10의 간격을, 株價가 \$ 200을 넘는 경우에는 \$ 20의 간격을 두었다. 이러한 간격은 去來所가 去來의 幅과 流動性을 높이기 위해 調整할 수 있다. 이와 같이 옵션의 行使價格을 基礎證券인 普通株의 價格에 따라 一定한 간격으로 標準化하였다. (2) 옵션滿期日의 固定 : 옵션의 滿期는 3個月 單位로 되어 있으며 가장 긴 것이 9個月 이다. 이러한 滿期日은 ① 1月/4月/7月/10月, ② 2月/5月/8月/11月, ③ 3月/6月/9月/12月과 같은 세개의 순환과정 중 하나에 속한다. 한편 옵션去來는 滿期가 되는 달의 세 번째 금요일까지 계속되며 翌日인 토요일에 滿期가 終了되고, 새로운 9個月짜리 옵션은 滿期日 다음의 첫 營業日에 上場하는 등 옵션滿期日을 標準化하였다. (3) 去來株式數 및 株式分割·配當 등에 관한 取扱節次의 標準化 : 옵션契約에 따른 權利의 行使는 基礎證券 100株 單位로 하도록 하고 株式分割이나 株式配當의 경우에는 例外를 認定하였다.

特히 株式分割이나 株式配當 등의 경우에는 옵션契約이 調整되며, 契約條件의 변경은 옵션所有者나 發行者 중 어느 一方이 不利하지 않도록 去來所에서 統制한다.

以上과 같은 契約의 標準化는 옵션去來費用을 줄임으로써 去來를 活性化시키는데 큰 역할을 하였다. 한편 옵션去來와 관련하여 CBOE 등 美國에서 去來되는 옵션價格은 The Wall Street Journal 에서 유럽옵션去來所와 런던옵션市場의 狀況은 Financial Times of London 에서 發表하고 있다.[4]

2. 옵션의 去來戰略

投資對象으로서 옵션의 去來戰略은 基礎證券의 買入과 콜 옵션의 賣渡 또는 콜 옵션과 풋 옵션의 結合 등 여러가지 形態로 이루어질 수 있는데 이러한 結合效果는 옵션價格의 變化率이 基礎證券價値의 變化率을 상회한다는데 기인한다.

投資對象이 基礎證券과 이 基礎證券에 대한 콜과 풋만이 있을 경우의 投資戰略은 ① 네이키드 · 포지숀(naked position), ② 헷지 · 포지숀(hedge position), ③ 스프레드 · 포지숀(spread position), ④ 結合(combination) 등으로 區分할 수 있다.[5]

네이키드 · 포지숀은 證券을 사거나 또는 팔기만 하는 즉, 株式의 買入이나 空賣(long stock 또는 short stock), 콜의 買入이나 發行(long call 또는 written call) 및 풋의 買入이나 發行(long put 또는 written put)과 같은 戰略으로 커버되지 않은 포지숀(uncovered position)이라고도 한다.

헷지 · 포지숀은 基礎證券의 買入(long position)과 옵션의 空賣(short position)로 危險이 전혀 없는 상태를 만드는 戰略이다. 헷지戰略은 전문적인 投資者들이 가장 중시하는 戰略으로 헷지 · 포지숀을 만들기 위한 株式의 數와 옵션의 數의 비율을 헷지比率(hedge ratio)이라고 한다. 이러한 헷지比率은 한 개의 옵션을 헷지하기 위해 다른 옵션을 保有하는 경우에도 적용할 수 있다. 헷지 · 포지숀을 만들면 소폭적인 株價變動에는 危險이 없게 되지만 株價變動幅이 크거나 또는 株價는 變動하지 않더라도 滿期가 가까와짐에 따라 危險에 露出되므로 헷지比率은 계속 修正되어야 한다. 投資者가 헷지比率만큼 옵션을 保有한다면 株價變動에 따른 포지숀價値의 變動比率인 露出率(exposure ratio)은 0이나 옵션去來

4) Ibid., pp. 3-11.
5) Ibid., pp. 21-44.

에 따른 費用이나 未來의 株價變動에 대한 豫測에 의해 헷지比率만큼 옵션을 保有하지 않으면 株價變動에 露出되게 된다. 強勢市場(bullish market)인 경우에는 露出率이 0보다 크면 株價 上昇에 따라 포지숀의 價値도 上昇하게 된다.

스프레드·포지숀은 同一한 基礎證券에 대하여 滿期 또는 行使價格이 다른 옵션을 買入·保有하는 동시에 空賣도 한다. 가장 많이 使用되는 스프레드는 通貨스프레드(money spreads), 時間스프레드(time spreads) 및 버터플라이·스프레드(butterfly spreads) 등이다. 通貨스프레드는 수직적 또는 價格스프레드(vertical or price spreads)라고도 하며 滿期는 同一하나 行使價格이 다른 경우이다. 즉, 基礎證券과 滿期는 同一하나 行使價格이 다른 옵션을 買入하는 동시에 空賣도 한다. 時間스프레드는 수평적 또는 카렌다·스프레드(horizontal or calender spreads)라고도 하며 行使價格은 同一하나 滿期가 相異한 옵션을 買入하면서 空賣도 하는 것이다. 이러한 時間스프레드 戰略은 滿期의 差異에 따른 옵션價格의 變化와 株價變動에 따른 옵션價格의 變化사이의 相置關係(trade-off)를 利用하려는 것으로, 滿期가 짧은 옵션의 價格은 급속히 감소하므로 投資者는 이러한 옵션은 空賣를 하고 가격 감소가 상대적으로 작은 滿期가 긴 옵션을 買入함으로써 그 差額을 획득하려는 것이다. 한편 버터플라이·스프레드는 샌드위치·스프레드(sandwich spreads) 라고도 하는데, 滿期는 同一하고 行使價格은 두 개는 같고 두 개는 相異한 네 개의 옵션으로 구성된 포오트폴리오(portfolio)를 말하는데 同一한 行使價格은 相異한 行使價格의 사이에 놓이게 된다.

結合포지숀은 스트래들(straddle), 스트립(strip) 및 스트랩(strap) 등이 一般的인 形態이다. 스트래들은 基礎證券, 滿期 및 行使價格이 同一한 콜 옵션과 풋 옵션을 同時에 去來하는 것으로서 스트래들의 買入은 풋 옵션과 콜 옵션의 買入을 뜻하며, 스트래들의 賣渡는 풋 옵션과 콜 옵션의 空賣를 뜻한다. 特히 스트래들의 買入은 投資者가 株式의 價格變動을 豫想하고는 있으나 變化의 方向을 알지 못하는 경우에 有用한 戰略이며, 반대로 스트래들의 賣渡는 株價變動이 전혀 없을 때 그 利得이 가장 크다. 따라서 株價變動幅이 클 경우 스트래들의 賣渡는 損失이 크게 되므로 커버(covered)된 스트래들을 發行하여 危險을 줄여야 한다. 그러나 스트래들을 賣渡하는 것은 텐더 오퍼(tender-offer)를 하는 때이므로 株價變動幅은 일반적으로 작다. 여기에서 텐더 오퍼는 吸收하고자 하는 會社의 株式에 대해 一定한 價格을 제시하고 이 條件으로 팔려고 하는 株主에게는 누구이던간에 그

株式을 사들이겠다는 提案으로 텐더價格(tender price)은 보통 現時價보다 높게 策定된다.

한편 스트립은 두 개의 풋 옵션과 한 개의 콜 옵션을 結合한 것이며, 스트랩은 두 개의 콜 옵션과 한 개의 풋 옵션을 結合한 것이다. 이러한 結合포지숀의 戰略은 다음에 살펴볼 「풋 옵션과 콜 옵션의 均衡關係」(put-call parity)와 유사한 개념을 利用한 풋 市場과 콜 市場 사이에서 행하는 裁定去來(arbitrage)의 하나이다.

以上에서 여러가지 옵션去來戰略을 살펴 보았으나 가장 많이 使用되는 것은 株式의 買入과 옵션의 空賣에 의한 헷지戰略이며, 기타 여러 戰略들은 아직은 흔치 않다고 하겠다.

Ⅲ. 옵션價格決定模型(OPM)

옵션價格決定에 가장 중요한 要因은 基礎證券價格(S)이며 以外에 行使價格(K), 滿期까지의 期間($\tau = T - t$), 基礎證券收益率의 分散(σ^2), 無危險利子率(r_f) 등이 옵션價格에 영향을 미치는 重要變數들이며, 이들 變數와 콜 옵션價格(C)과의 관계를 式으로 表示하면 다음과 같다.

$$C = f(S, K, \tau, \sigma^2, r_f)$$

이 式에서 各 變數들이 옵션價格에 미치는 영향을 나누어 살펴보면, ① 行使價格과 滿期日이 定해졌으면 基礎證券의 市場價格이 높을수록 옵션價格도 높아지는데, 이는 現在의 市場價格이 높을수록 옵션滿期日에 基礎證券價格이 行使價格보다 높을 確率이 크기 때문이다. ② 行使價格이 낮을수록 옵션價格은 높아지는데, 이는 行使價格이 낮을수록 基礎證券價格이 行使價格보다 높을 確率이 커지기 때문이다. ③ 滿期까지의 期間이 길수록 옵션價格은 上昇하는데, 이는 滿期까지의 期間이 길면 基礎證券價格이 行使價格보다 높을 確率이 크기 때문이며 滿期日이 가까와질수록 옵션價格의 下落率은 增加한다. ④ 基礎證券收益率의 分散이 클수록 옵션價格은 上昇하는데, 이는 옵션의 條件附請求權的 성질에 기인하는 것으로 分散이 크면 滿期時點에서 基礎證券價格이 行使價格보다 높을 確率이 크다. ⑤ 無危險利子率이 一定하다면 無危險利子率이 높을수록 옵션價格은 上昇하는데, 이는 無危險利子率이 높을수록 行使價格의 現在價値를 감소시키기 때문이다. 그러나 無危險利子率은 市場狀況과 關聯하여 確率的(stochastic)으로 변하기 때문에 一定하다는 假定을 하지 않

으면 그 效果를 測定하기가 어렵다.

以上의 變數들에 대한 콜 옵션價格의 偏微分은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial S} > 0,\ \frac{\partial C}{\partial K} < 0,\ \frac{\partial C}{\partial \tau} > 0,\ \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} > 0,\ \frac{\partial C}{\partial r_f} > 0$$

이러한 옵션價格決定에서 特異한 것은 基礎證券價格의 變動이 stochastic process (diffusion process)를 따른다고 假定하고 있으며, 옵션價格도 投資者의 危險에 대한 태도 등의 选好構造(preference structure)나 基礎證券의 平均收益率 등과는 無關하게 決定된다는 것이다. 以下에서는 OPM 導出을 위한 諸 接近方法과 OPM에 관한 實證的 硏究를 나누어 살펴보고자 한다.

1. OPM 導出을 위한 諸 接近方法

옵션價格決定理論은 블랙과 숄즈의 論文이 發表되기 以前의 不完全均衡模型, 블랙과 숄즈의 一般均衡價格決定模型, 模型이 基礎하고 있는 假定의 緩和와 模型의 擴張段階로 發展하여 왔다.

블랙과 숄즈 以前의 옵션評價에 관한 硏究는 워런트(warrant)에 集中되었다. 워런트는 옵션의 전형적인 形態로 企業의 負債인데 워런트의 所持者는 約定된 條件으로 企業의 株式이나 기타 다른 資産을 살 수 있는 權利를 갖는다. 이러한 硏究는 Sprenkle (1961), Ayres(1963), Bonnes(1964), Samuelson(1965), Baumol, Malkiel & Quant(1966)및 Chen(1970) 등에 의해 이루어졌는데 이들의 옵션評價公式은 하나 이상의 任意變數를 포함하고 있어 完全한 解를 導出할 수 없었다. Sprenkle은 두 개의 未知變數 즉, ① 現在의 株價에 대한 워런트 滿期時點에서 期待株價와의 比率과 ② 株式의 危險에 따른 割引要素 등을 포함한 옵션評價方式을 유도하고 이들 未知變數를 實證的으로 測定하려고 하였으나 測定하지 못하였다. 한편 Samuelson은 株式의 期待收益率과 워런트의 期待收益率 (워런트에 適用할 割引率)을 未知變數로 놓고 옵션評價公式을 유도하였다. 그는 워런트 滿期日에 株價가 log-normal 分布를 한다고 假定하고 期待値를 구하여 이 값을 行使價格에서 除하고 남은 期待値를 워런트의 期待收益率로 割引함으로써 現在價値化하였다. 이러한 模型은 워런트의 價値를 決定하는 적절한 절차를 거치지 않아 市場均衡模型이 될 수 없다고

하겠다.[6]

以下에서는 OPM 導出을 위한 블랙과 숄즈의 接近方法, 二項分布 接近方法(The binomial approach) 및 危險中立性(Risk neutrality argument)의 接近方法 등에 관하여 살펴본 후 OPM에 관한 諸 模型에 대하여 整理하고자 한다.

가. 블랙과 숄즈의 OPM

블랙과 숄즈의 OPM은 헷지·포오트폴리오를 構成하여 導出하는 方法과 資本資産價格決定模型(CAPM)을 利用하여 導出하는 方法이 있다. 이들은 OPM 導出을 위해 株式市場과 옵션市場에 대하여 다음과 같은 假定을 하였다.[7] ① 短期利子率은 항상 一定하다. ② 株價는 連續的인 랜덤·워크(random walk)에 따라 變化하는 비너·프로세스(wiener process)로[8] 表示되며 株式收益率의 分散은 一定하다. ③ 株式에 대한 配當은 없다. ④ 옵션은 滿期日에만 行使되는 유로피안 옵션이다. ⑤ 株式이나 옵션의 賣買에 따른 去來費用은 없다. ⑥ 短期利子率로 借入 또는 貸出하는데 制限이 없다. ⑦ 空賣에 대한 制限이 없다 等이다.

이러한 假定은 模型導出에는 편리하나 現實과는 乖離된 理想的인 條件(ideal conditions)들이다. 이후 非現實的인 假定을 緩和하고 模型을 擴張시키면서 옵션價格決定理論은 더욱 發展하였다.

---

6) F. Black & M. Scholes, "The Pricing of options and Corporation Liabilities", Edited by S. H. Archer & C. A. D'Ambrosio, Macmillan Publishing Co., Inc., 1983, pp. 278-279.

7) Ibid., p. 279.

8) $\frac{ds}{s}=\mu dt+\sigma dz$ (단, μ: 瞬間期待收益率, σ: 瞬間期待收益率의 分散, dz: basic (또는 standard) wiener process) wiener process라 하면 一般的으로 basic wiener process를 말하며, 確率變數 $\tilde{z}(t)$가 微分方程式 $d\tilde{z}(t)=\tilde{\epsilon}\sqrt{dt}$로 表示되는데 $E[d\tilde{z}(t)]=0$, $var[d\tilde{z}(t)]=\Delta t$.이며 時間이 지날수록 分散은 커진다. $\tilde{\epsilon}(t)$는 平均 0, 分散 1인 正規分布를 가지며($\tilde{\epsilon}(t)\sim N(0,1)$) 系列相關(serial correlation) 없는($cov\{\tilde{\epsilon}(t_i), \tilde{\epsilon}(t_j)\}=0$, 단, $i\neq j$) 確率變數로 Purely random(또는 white noise)이라고 한다. 이에 대해 general wiener process는 geometric Brownian motion, stationary Itô process 또는 log-normal distribution이라고도 하며 微分方程式 $d\tilde{x}(t)=adt+bd\tilde{z}(t)$ (a: drift(순간평균), b: variance(순간분산))으로 表示되며 a, b는 常數로 basic wiener process에서 처럼 $a=0$, $b=1$일 필요가 없으며 $E[d\tilde{x}(t)]=at$, $var[d\tilde{x}(t)]=b^2t$인 正規分布를 가진다. 한편 Itô process는 Brownian motion이라고도 하는데 $d\tilde{x}(t)=m(x,t)dt+s(x,t)d\tilde{z}(t)$ (m: 순간평균, s: 순간표준편차)로 表示되며 時間, 場所에 관계없이 $m(x,t)$를 a로 $s(x,t)$를 b로 주게 되면 $d\tilde{x}(t)=adt+bd\tilde{z}(t)$가 되어 general wiener process의 形態가 된다. 따라서 general wiener process는 Itô process의한 特殊한 形態라 할 수 있다.

(1) 헷지 · 포오트폴리오 接近方法

블랙과 숄즈는 株價의 連續性과 log-normal 分布 등의 假定下에 콜 옵션과 株式으로 無危險資産과 同一한 現金흐름을 갖는 헷지 · 포오트폴리오를 구성하고 있다.[9] 이러한 헷지 포오트폴리오의 價値(V_H)는 買入한 株式의 數(Q_s), 株富 價格(S), 콜 옵션의 買入數(Q_c) 및 콜 옵션의 價格(C)으로 다음과 같이 表示된다.

$$V_H = SQ_s + CQ_c \quad \cdots\cdots(1)$$

포오트폴리오의 價値變化는 (1)式을 全微分하여 구한다.

$$dV_H = Q_s dS + Q_c dC \quad \cdots\cdots(2)$$

株價가 general wiener process (또는 geometric Brownian motion process)를 따른다면 옵션價格도 마찬가지로 wiener process를 따르게 된다는 Itô lemma 를 利用하여 옵션價格의 變化(dC)를 表示하면 다음과 같은 確率微分方程式이 된다.

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S}\, dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\, \sigma^2 S^2 dt \quad \cdots\cdots(3)$$

(3)式에서 確率項(stochastic term)은 dS이고 나머지는 確定된 값이다. 이러한 (3)式을 (2)式에 代入하면,

$$dV_H = Q_s dS + Q_c \left[\frac{\partial C}{\partial S}\, dS + \frac{\partial C}{\partial t}\, dt + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\, \sigma^2 S^2 dt\right] \quad \cdots\cdots(4)$$

만약 株式과 콜 옵션의 構成比率을 $1/(\partial C/\partial S)$로 維持하면서 헷지 포오트폴리오를 連續的으로 調整하면 헷지는 完全히 無危險 狀態가 되며, 無危險 헷지 포오트폴리오는 資本市場이 效率的이라면 市場均衡狀態에서 無危險利子率과 同一한 收益率을 갖게 될 것이다.

이러한 均衡關係를 表示하면,

$$\frac{dV_H}{V_H} = r_f dt \quad \cdots\cdots(5)$$

(5)式과 더불어 無危險헷지가 株式 1株의 買入과 $1/(\partial C/\partial S)$個의 콜 옵션의 賣渡로 維

9) T. E. Copeland & J. F. Weston, op. cit., pp. 281-284.

持된다는 사실로부터 다음 관계가 成立한다.

$$Q_s = 1,\ Q_c = -\frac{1}{(\partial C/\partial S)} \quad \cdots\cdots(6)$$

(5)式과 (6)式을 (4)式에 代入하여 整理한 후 V_H를 (1)式으로 代替하고 (6)式을 다시 사용하면 다음과 같은 옵션價格方程式이 나온다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = r_f C - r_f S\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \quad \cdots\cdots(7)$$

境界值條件 : $C = Max\,[0,\ S-K]$

블랙과 숄즈는 (7)式의 解를 求하기 위하여 變數變換하고 物理學의 熱交換方程式을 利用하여 다음과 같은 均衡옵션價格을 導出했다.

$$C = S\cdot N\left\{\frac{\ln(S/K) + [r_f + (\sigma^2/2)]T}{\sigma\sqrt{T}}\right\} - e^{-r_f T}K\cdot N\left\{\frac{\ln(S/K) + [r_f - (\sigma^2/2)]T}{\sigma\sqrt{T}}\right\} \quad \cdots\cdots(8)$$

단, $N(\cdot)$은 標準正規分布의 累積的 確率

(2) CAPM 接近方法

블랙과 숄즈는 市場均衡條件下에서 資本資産의 危險과 期待收益間의 관계를 나타내는 CAPM을 利用하여 옵션價値를 나타내는 微分方程式을 導出하였다.[10]

CAPM에서는 特定資産의 期待收益率 $E\left(\frac{dS}{S}\right)$이 體系的 危險 β_s의 線型函數인데, 이로부터 옵션의 體系的 危險(β_c)과 株式의 體系的 危險(β_s)과의 關係를 보면 다음과 같다.

여기에서 特定資産을 株式으로 보았으므로 市場 포오트폴리오(market portfolio)의 期待收益率을 $E\left(\frac{dM}{M}\right)$이라 하면 株式의 期待收益率 $E\left(\frac{dS}{S}\right)$와 옵션의 期待收益率 $E\left(\frac{dC}{C}\right)$는 다음과 같은 式으로 表示된다.

$$E\left(\frac{dS}{S}\right) = r_f\,dt + \beta_s\left[E\left(\frac{dM}{M}\right) - r_f\right]dt \quad \cdots\cdots(9)$$

단, $\beta_s = cov\left(\frac{dS}{S}\,;\,\frac{dM}{M}\right) / var\left(\frac{dM}{M}\right)$

10) F. Black & M. Scholes, op. cit., pp. 283-284.

$$E\left(\frac{dC}{C}\right)=r_f dt+\beta_c\left[E\left(\frac{dM}{M}\right)-r_f\right]\ dt \quad\cdots\cdots (10)$$

단, $\beta_c=cov\left(\frac{dC}{C},\frac{dM}{M}\right)/var\left(\frac{dM}{M}\right)$

옵션의 價値는 株價와 時間의 函數 즉, $C=f(S,\ t)$이므로 Itô lemma를 利用하여 옵션價格의 變化(dC)를 表示하면 다음과 같은 確率微分方程式이 된다.

$$dC=\frac{\partial C}{\partial S}dS+\frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt \quad\cdots\cdots (11)$$

(11)式을 옵션價格 C로 나누고, $dt\rightarrow 0$이면

$$\frac{dC}{C}=\frac{\partial C}{\partial S}\cdot\frac{dS}{C}=\frac{\partial C}{\partial S}\cdot\frac{S}{C}\cdot\frac{dS}{S} \quad\cdots\cdots (12)$$

(12)式을 (10)式의 β_c에 代入하면,

$$\beta_c=\frac{\partial C}{\partial S}\cdot\frac{S}{C}\cdot cov\left(\frac{dS}{S},\frac{dM}{M}\right)/var\left(\frac{dM}{M}\right) \quad\cdots\cdots (13)$$

株價에 대한 옵션價格의 彈力性(elasticity)은 $\eta=\frac{\partial C}{\partial S}\cdot\frac{S}{C}=\frac{S}{C}\cdot N(d_1)$이므로 β_s와 β_c의 관계는 $\beta_c=\eta\cdot\beta_s$이며, $0\leq N(d_1)\leq 1$이기 때문에 $\beta_c\geq\beta_s$이다.

이제 옵션價値方程式을 導出하기 위해 (10)式에 C를 곱하고 β_c 대신에 $\beta_c=\eta\cdot\beta_s$를 代入하여 整理하면,

$$E(dC)=r_f Cdt+\beta_s\frac{\partial C}{\partial S}\cdot S\left[E\left(\frac{dM}{M}\right)-r_f\right]dt \quad\cdots\cdots (14)$$

또한 Itô lemma에 의해 展開한 (11)式의 期待値를 취하면,

$$E(dC)=\frac{\partial C}{\partial S}E(dS)+\frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt \quad\cdots\cdots (15)$$

(15)式에 (9)式의 $E(dS)$를 代入하면,

$$E(dC)=r_f S\frac{\partial C}{\partial S}dt+S\frac{\partial C}{\partial S}\beta_s\left[E\left(\frac{dM}{M}\right)-r_f\right]dt+\frac{\partial C}{\partial t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt \quad \cdots\cdots (16)$$

(15)式과 (16)式은 同一하므로, 이를 整理하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = r_f C - r_f S\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \quad \cdots\cdots (17)$$

(17)式은 헷지 포오트폴리오 接近方法에 의해 유도된 옵션價格方程式과 同一함을 알 수 있다.

以上과 같은 블랙과 숄즈의 模型은 現實과 乖離된 非現實的인 假定위에서 展開되었지만 옵션理論發展의 중요한 전기가 되었다.

나. 二項옵션價格決定模型(Binomial OPM)

블랙과 숄즈의 OPM은 一般均衡模型으로서 企業財務의 各 分野에 適用 可能하나 確率微分方程式과 같은 高度의 數理 知識을 通해야만 導出된다. 따라서 能率的인 計算과 教育的인 側面에서 좀더 直觀的 接近方法인 二項 OPM이 중요시 되고 있다. 二項 OPM은 Cox , Ross & Rubinstein (1979年) 및 Rendleman & Barter(1979年)에 의해 開發되었다. 이 模型은 離散時間(discrete time) 模型으로 導出過程이 單純할 뿐만 아니라, 유로피안 옵션의 價格決定은 물론 좀 더 복잡한 아메리칸 옵션의 問題도 數理的 시뮬레이션(simu-lation)만 活用하면 해결할 수 있다.[11]

Cox , Ross & Rubinstein은 株價가 多段階 二項分布(multiplicative binomial process)를 따른다는 假定下에서 옵션價値를 評價하기 위해 콜 옵션과 同一한 現金흐름을 갖는 헷지 포오트폴리오를 構成하고, 無危險裁定去來機會가 存在하지 않는다는 市場均衡條件下에서 옵션價格公式을 유도하였다.

株價가 二項分布를 따른다고 假定하였으므로 一期末에 株價가 上昇할 確率을 q 이때의 株價를 uS, 株價가 下落할 確率을 $1-q$ 이때의 株價를 dS라 하고, 株價가 上昇했을 때 1期末의 옵션價値를 C_u , 下落했을 때의 옵션價値를 C_d 라 하면 1期末의 옵션價値 C_u, C_d 는 다음과 같다.

---

11) T. E. Copeland & J. F. Weston, op. cit., pp. 245-255.
R. A. Jarrow & A. Rudd, op. cit., pp. 179-201.

$C_u = Max\,[0,\ uS-K]$: 確率 q

$C_d = Max\,[0,\ dS-K]$: 確率 $1-q$

여기에서 裁定去來가 없으려면 $d < r_f < u$의 관계가 成立되어야 한다.

이제 1期末에 株價變動에 관계없이 同一한 收益을 갖는 無危險 헷지 포오트폴리오를 구성하기 위하여 하나의 株式을 S로 買入하고 이에 대하여 m개의 콜 옵션을 賣渡하였다면 現在의 純投資額$(S-mC)$에 대한 期末의 利得은 株價가 上昇하면 $uS-mC_u$, 株價가 下落하면 $dS-mC_d$가 된다. 헷지 포오트폴리오는 期末에 同一한 收益을 實現하여야 하므로,

$$uS-mC_u = dS-mC_d$$

이 式에서 賣渡한 콜 옵션의 數(m)를 求하면,

$$m = \frac{S(u-d)}{C_u-C_d} \quad \cdots\cdots (18)$$

이러한 헷지 포오트폴리오는 危險이 없기 때문에 期初投資金額과 期末收益의 관계는 다음과 같이 表示된다.

$$r_f\,(S-mC) = uS-mC_u$$

$$C = \frac{S(r_f-u)+mC_u}{m\,r_f} \quad \cdots\cdots (19)$$

(18)式을 (19)式에 代入하여 整理하면,

$$C = \left[C_u\left(\frac{r_f-d}{u-d}\right)+C_d\left(\frac{u-r_f}{u-d}\right)\right] \div r_f \quad \cdots\cdots (20)$$

$$= [PC_u + (1-P)\,C_d] \div r_f \quad \cdots\cdots (21)$$

단, $P=\frac{r_f-d}{u-d}$, $1-P=\frac{u-r_f}{u-d}$

(21)式에서 P는 헷징確率(hedging probability)이라고 하는데, $0<P<1$이며 確率의 屬性을 갖는데 均衡狀態에서 投資者가 危險中立的이라면 P는 確率 q의 값과 같다.

(21)式을 一般化하기 위해 2期間模型으로 擴張하여 1期때와 같은 方法으로 2期末의 狀

況을 展開하면 다음과 같다.

$$C_u = [PC_{uu} + (1-P)C_{ud}] \div r_f \quad \cdots\cdots (22)$$
$$C_d = [PC_{du} + (1-P)C_{dd}] \div r_f$$

(22)式을 (21)式에 代入하여 整理하면,

$$C = [P^2 C_{uu} + P(1-P)C_{ud} + (1-P)PC_{du} + (1-P)^2 C_{dd}] \div r^2_f \quad \cdots\cdots (23)$$

$$= [P^2 Max\{0, u^2S-K\} + 2P(1-P)Max\{0, udS-K\} + (1-P)^2 Max\{0, d^2S-K\}] \div r^2_f$$

(23)式에서 r_f가 0보다 크면 즉, 利子率이 陽이라면 항상 $C>S-K$이므로 콜의 正確한 價値를 表現한다고 하겠다.

이러한 二項 OPM을 T期間으로 擴張하여 一般化시키면,

$$C = \left[\sum_{n=a}^{T} \frac{T!}{(T-n)!n!} P^n(1-P)^{T-n} Max\{0, u^n d^{T-n} S - K\}\right] \div r_f^T \quad \cdots\cdots (24)$$

단, n : 株價上昇回數

a : $u^a d^{T-a} S>K$인 最小非陰의 整數

二項分布函數를 $\phi[a:T,P]$, $\phi[a:T,P']$으로 表示하면 二項 OPM은 다음과 같이 變形할 수 있다.

$$C = S\phi[a:T,P'] - Kr_f^T\phi[a:T,P] \quad \cdots\cdots (25)$$

단, $P \equiv \dfrac{r_f-d}{u-d}$, $P' \equiv \left(\dfrac{u}{r_f}\right)P$

$a \equiv a > \ln(K/sd^T)/\ln(u/d)$인 最小非陰의 整數

만약 $a>T$이면 $C=0$

Cox, Ross & Rubinstein 의 模型에서 옵션期間이 一定하고 株價變動의 數(n)가 ∞일때 (25)式은 블랙과 숄즈의 OPM에 관한 式(8)과 一致하게 된다.

이와 같은 二項 OPM의 특징을 보면, ① 模型에 株價의 上昇이나 下落 確率이 나타나지

않으므로 各 投資者가 相異한 主觀的 態度(確率)를 가지고 있다 하더라도 S, u, d, r_f와 콜價格과의 관계에서 一致된 見解를 가질 수 있다. ② 콜 옵션의 價値는 投資者의 危險에 대한 태도에 영향을 받지 않으므로, 危險中立的 經濟(risk neutral economy)에서 未來의 價値를 無危險利子率로 割引한 期待値라 할 수 있다. ③ CAPM과 달리 옵션의 價格은 基礎證券의 確率的 變動에 따라 決定되므로 市場 포오트폴리오와는 無關하다.

다. 危險中立性主張과 Heuristic 接近方法

一般的으로 投資者들은 危險回避的(risk averse)이기 때문에 危險을 부담하지 않으려 하고 危險을 부담하게 되면 이에 대한 補償으로 危險프레미엄을 要求한다. 따라서 危險資産(risky asset)의 均衡價格은 危險프레미엄의 測定에 의해 決定된다고 하겠다.

그러면 옵션에 대한 危險프레미엄은 어떻게 決定해야 할 것인가? 앞에서 살펴본 CAPM 接近方法에서 옵션의 體系的 危險(β_c)이 株式의 體系的 危險(β_s)보다 크기 때문에 프레미엄도 옵션에 대한 危險프레미엄이 보다 커야 할 것이다. 그러나 블랙과 숄즈의 OPM에서는 옵션價値를 헷지 포오트폴리오에 의해 評價하고 있기 때문에 投資者가 危險回避的이라 하더라도 옵션에 대한 危險프레미엄을 줄 필요가 없다고 하겠다. 왜냐하면 헷지 포오트폴리오$\left(H=S-\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)^{-1}C\right)$에서는 完全헷지比率(perfect hedge ratio)인 $\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)^{-1}$이 連續的으로 調整되기 때문에 헷지 포오트폴리오 자체가 無危險狀態이기 때문이다. 따라서 옵션價値를 評價하기 위해 構成된 헷지 포오트폴리오의 價値는 假想의 危險中立的 經濟나 現實의 危險回避的 經濟에서 모두 同一하게 評價할 수 있다는 것이 危險中立性主張이며 Cox & Ross에 의해 처음 提示되었다.

이러한 危險中立性主張을 利用하면 옵션評價의 問題는 calculus 問題에 지나지 않아 블랙과 숄즈의 OPM도 heuristic 하게 導出할 수 있다. 이를 위해 우선 滿期 T時點에서 株價의 期待値인 $E(S_T)$에 대하여 살펴본 후 heuristic 接近方法에 의해 OPM을 導出해 보기로 하겠다.[12] 理論展開에 앞서 한 가지 强調할 점은 危險中立性主張이라고 하여 株價가 실제로 無危險利子率로 增加하여야 한다는 것은 아니고 단지 完全헷지가 可能하다면 株價가 無危險利子率로 增加하는 것처럼 옵션의 價値도 評價할 수 있다는 것이다.

이제 株價가 log-normal 分布를 한다고 假定하고 株價收益率의 log값을 보면 다음과 같다.

12) R. A. Jarrow & A. Rudd, op. cit., pp. 88-95.

$$\log\left(\frac{S_T}{S}\right)=\mu dt+\sigma\sqrt{dt}\ z \quad \cdots\cdots(26)$$

단, μ : 株式收益率의 log값

σ : 株式收益率 log값의 標準偏差

z : 平均 0, 標準偏差 1인 標準正規確率變數[13)]

株價가 log-normal 分布를 한다는 것을 分析하기 위해 (26)式을 指數函數로 바꾸면,

$$\frac{S_T}{S}=exp\ (\mu dt+\sigma\sqrt{dt}\ z) \quad \cdots\cdots(27)$$

(27)式을 테일러 展開(Taylor series)한 후 2次項 以上을 무시하면 (26)式의 連續時間 (continuous time) 模型은 다음과 같게 된다.[14)]

$$\frac{dS}{S}=\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\sqrt{dt}\ z$$

한편, 分布函數의 母數인 μ, σ를 無危險資産의 함수로 表示하기 위해 (27)式의 기대값을 취하면 다음과 같다.

---

13) z은 다음과 같이 定義된다.

$$Prob\,[\,x\le z\le x+dx\,]=N'(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$Prob\,[\,z\le y\,]=N(y)=\int_{-\infty}^{y}N'(x)dx$$

단, $N'(x)$는 確率密度函數, $N(y)$는 累積分布函數

14) 이 式은 휴리스틱(heuristic)하게 導出한 것으로 正確히는 連續時間確率過程에 대한 calculus인 Itô calculus에 의하여야 한다. 이 式의 導出過程을 整理하면,

$$S_{t+\Delta t}=S_t\cdot exp\ (\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\ z)$$

$$S_{t+\Delta t}=S_t\cdot\left[1+(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\ z)+\frac{(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\ z)^2}{2!}+\frac{(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\ z)^3}{3!}+\cdots\cdots\right]$$

2次項 以上을 무시하고, $\Delta S_t=S_{t+\Delta t}-S_t$ 이므로

$$\frac{\Delta S_t}{S_t}=\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\ z+\frac{\sigma^2\Delta t z^2}{2}+\cdots\cdots$$

여기에서 $Var\ Z=E(z^2)-E^2(z)=E(z^2)=1$ 이므로

$$\frac{\Delta S_t}{S_t}=(\mu+\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\ z$$

$$E\left(\frac{S_T}{S}\right)=E\left[\ exp\ (\mu dt+\sigma\sqrt{dt}\ \ z)\right]$$
$$=\ exp\ \left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)dt \quad \cdots\cdots (28)$$

(28)式은 正規確率變數에 대한 積率發生函數(moment generating function)가 $E[\ exp\ (\sigma\sqrt{dt}\ \ z)]=\ exp\ \left[\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)dt\right]$이기 때문이다.

그런데, 危險中立的 經濟에서는 滿期 T時點에서 log-normal 分布를 하는 株價의 期待收益率이 滿期 T에서 1달러를 支給하는 無危險債券(default-free bond)의 價格과 같기 때문에 다음과 같은 관계가 成立한다.

$$E\left(\frac{S_T}{S}\right)=\ exp\ \left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)dt=B(t,T-t)=e^{r_f\tau}$$

여기에서 $B(t,T-t)$는 滿期 T에서 1달러를 支給하는 無危險債券이며 τ는 滿期까지의 期間$(T-t)$으로 上記 關係에 의해 $r_f=\mu+\frac{\sigma^2}{2}$이다. 또는 $\mu=r_f-\frac{\sigma^2}{2}$.

以上의 結果를 바탕으로 옵션價格을 評價하면 다음과 같다. 우선 옵션의 期待收益率과 옵션의 現在價値(C)를 式으로 表示하면,

$$E\left(\frac{C_T}{C}\ |S\ \right)=\frac{1}{C}\ E(C_T|S)=e^{r_f\tau}$$

$$C=\bar{e}^{r_f\tau}\ E(C_T|S)$$
$$=\bar{e}^{r_f\tau}E[max\ (0,\ S_T-K)] \quad \cdots\cdots (29)$$

(29)式에서 $S_T\leq K$이면 $C=0$이나, $S_T>K$인 in-the-money의 경우에는 C가 다음 같이 表示된다.

$$C=e^{-r_f\tau}E(S_T-K)=e^{-r_f\tau}\ E(S_T)\ -e^{-r_f\tau}\ K$$

따라서 $S_T>K$일 確率을 P라고 하면 $C=0\ (S_T\leq K)$일 確率은 $1-P$이므로

$$C=(1-P)(0)+P[\ e^{-r_f\tau}E(S_T|S_T>K)\ -\ e^{-r_f\tau}\ K]$$
$$=e^{-r_f\tau}\ E(S_T|S_T>K)\ P-e^{-r_f\tau}\ \ KP \quad \cdots\cdots (30)$$

(30)式에서 옵션價値를 評價하려면 株價가 行使價格보다 클 確率 $P(=\text{prob}\,[S_T>K])$와 滿期 T時點에서 株價의 期待値 $E(S_T|S_T>K)P$를 各各 求해야 한다.

그러면 우선 P를 求하기로 하겠다. 이를 위해 (27)式을 다시 整理하면,

$$S_T=S\ exp\,(\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}\ z)$$

따라서, $P(=\text{Prob}\,[S_T>K])=\text{Prob}\,[S\ exp\ (\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}\ z)>K]$

$$=\text{Prob}\left[z>-\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+\mu\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}\right]$$

正規分布는 左右對稱이므로 $\text{Prob}[z>-x]=\text{Prob}\,[z<x]$이기 때문에, 위의 式을 다시 쓰면,

$$P=\text{Prob}\left[z<\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+\mu\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}\right]$$

累積正規分布의 定義로부터 이 式은,

$$P=N\left[\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+\mu\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}\right]\ \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

危險中立性의 假定下에서 나온 $\mu=r_f-\frac{\sigma^2}{2}$의 關係를 (31)式에 代入하면,

$$P=N\left[\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+r_f\tau-\frac{\sigma^2\tau}{2}\right\}/\sigma\sqrt{\tau}\right]$$

$$=N\left[\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+r_f\tau+\frac{\sigma^2\tau}{2}\right\}/\sigma\sqrt{\tau}-\sigma\sqrt{\tau}\right]$$

$$=N(h-\sigma\sqrt{\tau})$$

단, $h=\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+r_f\tau+\frac{\sigma^2\tau}{2}\right\}/\sigma\sqrt{\tau}$

다음은 滿期 T時點에서의 株價(S_T)의 期待値를 求하여야 하는데, 이를 $q\equiv E(S_T|S_T>K)P$라 定義하고 式을 展開하기로 하겠다.

앞에서 $S_T=S\ exp\ (\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}\ z)$이므로,

$$q=\int_K^\infty S\ \ exp\,(\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}\ x)\ \ exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=\int_K^\infty S\cdot e^{\mu\tau+\frac{\sigma^2\tau}{2}-\frac{\sigma^2\tau}{2}+\frac{2\sigma\sqrt{\tau}x}{2}-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=\int_K^\infty S\cdot e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})\tau}\ e^{-\frac{(\sigma\sqrt{\tau}-x)^2}{2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=S\cdot exp\left[(\mu+\frac{\sigma^2}{2})\tau\right]\int_K^\infty\ exp\left[-\frac{(\sigma\sqrt{\tau}-x)^2}{2}\right]\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

이제 $y=\sigma\sqrt{\tau}-x\,(x;z)$로 變數變換하고 $\mu=r_f-\frac{\sigma^2}{2}$으로 代替한다. 그런데 $S_T>K$는 다음을 뜻하므로, 即

$$z>-\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+\mu\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}$$

$$z=\sigma\sqrt{\tau}-y>-\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+\mu\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}$$

따라서, $y<\sigma\sqrt{\tau}+\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+\mu\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}$

$$y<\left\{\sigma^2\tau+\log\left(\frac{S}{K}\right)+\mu\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}$$

$$y<\left\{\sigma^2\tau+\log\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}$$

$$y<\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+r_f\tau+\frac{\sigma^2\tau}{2}\right\}/\sigma\sqrt{\tau}=h$$

以上에 따라 (32)式을 整理하여 累積正規分布로 나타내면 다음과 같다.

$$q=S\ \ exp\,(r_f\tau)\int_{-\infty}^{h}exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=S\ \ exp\,(r_f\tau)\cdot N(h)$$

이와 같은 p와 $q\equiv E(S_T\,|\,S_T>K)\,P$의 값을 옵션價値 評價를 위해 (30)式에 代入하면,

$$C=e^{-r_f\tau}\cdot S\cdot exp(r_f\tau)\cdot N(h)-e^{-r_f\tau}\cdot K\cdot N(h-\sigma\sqrt{\tau})$$

$$=S\cdot N(h)-e^{-r_f\tau}\cdot K\cdot N(h-\sigma\sqrt{\tau}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

단, $h=\left\{\log\left(\frac{S}{K}\right)+r_f\tau+\frac{\sigma^2\tau}{2}\right\}/\sigma\sqrt{\tau}$

(33)式은 블랙과 숄즈가 導出한 均衡옵션價格인 (8)式과 同一함을 알 수 있다. 이 式의 構

成은 滿期에 株價가 行使價格보다 클 경우의 期待株價인 $S \cdot N(h)$ 項과 滿期에 콜 權利를 行使할 경우 豫想되는 費用의 現價인 $e^{-r_f \tau} \cdot K \cdot N(h-\sigma\sqrt{\tau})$ 項으로 되어 있다. 이러한 heuristic 導出方法은 完全헷지가 이루어질 수 있다는 것은 證明하지 않았지만 그 以外에는 完全한 方法이라고 하겠다.

2. OPM에 관한 實證的 硏究

CAPM에서도 마찬가지이지만 OPM의 檢證上 問題는 두 가지 假說의 同時的 檢證에 의해 이루어져야 한다는 것이다. 이때에 서로 分離되어 檢證될 수 없는 連帶假說(joint hypothesis)은 ① OPM은 妥當하다라는 假說과 ② 資本市場은 效率的이다라는 假說이다.

OPM에 대한 여러 檢證結果들은 OPM이 옵션의 均衡價格을 說明하는 實證模型이 될 수 있다고 보고 있으나 다른 한편에서는 블랙과 숄즈의 模型이 統計的으로 有意한 바이어스(bias)가 있다는 것을 發見하고 複合的인 새로운 模型이 必要하다고 하였다. OPM의 實證可能性에 대한 肯定的인 견해는 옵션의 실제 市場價格과 模型에 의한 推定値간에 體系的인 差異가 있었으나 去來費用을 공제할 경우 非正常的인 超過收益은 사라지므로 模型價格은 실제 市場價格에 대한 不偏推定値이고 따라서 市場도 效率的이라는 것이다.

이에 대해 여러가지 代替模型 即, ① Jump 模型, ② diffusion - jump 混合模型, ③ constant elasticity of variance(CEV) 模型, ④ 複合옵션模型, ⑤ displaced diffusion 模型 등이 提示되었으나 어느 模型도 bias를 完全히 說明하지는 못하고 있다.

以下에서는 이러한 實證的 硏究에 대하여 살펴보고자 한다.[15]

가. Black & Scholes의 硏究

Black & Scholes 模型에 대한 最初의 實證的 檢證은 이들 자신에 의해 이루어졌다. 이들은 1966~1969年 사이에 場外市場에서 去來된 545種目의 證券에 대한 옵션契約의 價格資料를 利用하여 超過收益을 計算하였다. 이러한 超過收益과 市場指數를 回歸分析하여 헷지 포오트폴리오의 體系的 危險을 計算한 결과 이러한 포오트폴리오가 zero β를 갖는다는 것이 證明되었다.

去來費用이 없는 경우에 模型價格과 實際價格 사이에는 平均的인 利益差異가 있었으나

15) T. E. Copeland & J. F. Weston, op. cit., pp. 268-274.

대수로운 것은 아니었다. 即, 分散이 큰 株式에 대한 옵션은 過小評價되고, 分散이 작은 株式에 대한 옵션은 過大評價되는 경향을 보였는데 이는 分散推定上의 誤謬에 기인한다고 하였다. 그러나 去來費用을 고려하면 暗黙的인 超過收益은 사라진다. 따라서 去來費用을 감안하기 전에는 옵션市場이 效率的인 것처럼 보이지 않을지라도 去來者들이 이러한 非效率性을 利用할 수는 없다는 것이다.

나. Galai 의 硏究

Galai 는 1973 年 4 ~ 11 月 사이의 CBOE 資料를 利用하여 블랙과 숄즈의 模型이 妥當하다는 假定下에 옵션價格決定의 mechanism과 CBOE 의 效率性을 檢證하였다. CBOE 의 옵션契約은 行使價格과 滿期日이 標準化되어 있고 옵션價格이 매일 고시되므로 실제 市場價格과 模型價格에 따라 매일마다 옵션 포지숀을 調整함으로써 블랙과 숄즈보다 發展的인 分析을 하였다. Galai 檢證의 主要 結果를 보면, ① 事後的 헷지 收益을 使用하면 去來費用이 없는 경우에 블랙과 숄즈의 模型을 基礎로 樹立한 去來戰略은 상당한 超過收益을 얻는다. ② 去來費用이 1 %만 되어도 이러한 超過收益은 없어진다. ③ 이러한 結果는 無危險利子率이나 瞬間分散과 같은 여러 變數들의 變化에 좌우되지 않는다. ④ 이러한 結果는 配當調整에는 상당히 민감한데 높은 配當을 支給하는 株式에 대한 옵션은 낮은 配當을 하는 株式에 대한 옵션보다 利益이 적었다. 그러나 이러한 結果는 블랙과 숄즈의 模型이 無配當을 假定하고 있다는 事實을 반영한 것에 지나지 않는다고 하겠다. ⑤ 스프레드 戰略을 檢證해 본 結果 헷지 戰略과 비슷한 結論을 얻었다. 即, 滿期가 다른 유사한 옵션들의 事後價格이 완전히 일치하지는 않았으며 事前的으로도 超過收益이 發生하였다.

이와 같은 Galai 의 檢證結果는 블랙과 숄즈의 模型이 옵션價格을 잘 豫測할 수 있으며, 市場이 完全히 效率的인 것은 아니지만 去來費用을 감안하면 초과수익은 사라지고 價格이 去來費用보다 낮은 수준에서 效率的으로 決定된다는 것이다.

다. Klemkosky & Resnick 의 硏究

1977 年 6 月부터 CBOE에서 標準化된 풋 옵션을 去來하자 Klemkosky & Resnick 은 풋 옵션과 콜 옵션에 대한 去來資料를 가지고 總 606 개의 long 과 short 의 헷지 포오트폴리오를 構成한 후 配當이 一定(non - stochastic)하다는 假定下에 풋·콜의 均衡關係(put - call parity) 및 市場의 效率性을 檢證하였다. 여기에서 풋·콜의 均衡關係란 만일

유로피안 콜 옵션의 價格을 計算할 수 있다면 이에 상응하는 풋 옵션의 價格도 자동적으로 알 수 있다는 것이다.

풋·콜의 均衡關係에 입각한 檢證方法은 OPM에 대하여 어떤 假定을 할 必要가 없다는 점에서 편리하며, 풋·콜의 均衡關係가 成立하면 옵션의 評價方法과는 관계없이 裁定利益도 없고 市場도 效率的이라 하겠다.

이들이 long 헷지와 short 헷지의 評價式에 따라 檢證한 결과는 풋·콜의 均衡關係와 一致하였으며 옵션市場도 效率的이었다. 即, 去來所에 登錄된 會員社가 헷지 포지숀을 갖기 위한 最小去來費用이 20달러라고 하면 헷지의 27%만이 利益이 있었고, 非會員 投資者는 最小去來費用이 60달러라고 할 경우에 헷지의 7%만이 利益이 있었다.

라. MacBeth/Merville & Beckers의 研究

MacBeth & Merville은 1975년말에서 1976년말까지 CBOE 終價를 利用하여 6개의 主要會社(AT & T, Avon, Kodak, Exxon, IBM, Xerox) 株式에 上場된 모든 콜 옵션의 價格이 過大 또는 過小評價되었는지를 알아봄으로써 블랙과 숄즈의 模型을 檢證하였다. 이들은 블랙과 숄즈의 模型에 따라 基礎證券收益率의 內在的 標準偏差를 계산한 후, 블랙과 숄즈의 模型이 滿期 90日 이상의 at-the-money 옵션은 正確하게 評價하고 있다고 假定하여 模型價格과 實際價格의 差異를 計算하였다. 이들의 結論은, ① in-the-money옵션의 경우에는 模型價格이 市場價格보다 낮고, out-of-the-money 옵션의 경우에는 模型價格이 市場價格보다 높다. ② 블랙과 숄즈의 模型이 in-the-money 옵션을 過小評價하고 out-of-the-money 옵션을 過大評價하는 정도는 in-the-money나 out-of-the-money의 정도에 따라 증가하고 滿期가 줄어듬에 따라 감소한다. ③ 90日 이하의 out of-the-money 옵션의 模型價格은 平均的으로 市場價格보다 높으나 블랙과 숄즈의 模型에 의해서 이들 옵션이 過大評價된 정도와 out-of-the-money 정도 또는 滿期까지의 期間간에 어떤 일관적인 관계는 없었다는 것이다.

이들은 同一한 資料로 두 번째 論文에서 블랙·숄즈의 模型과 CEV 模型을 比較하였다. 두 模型의 基本的인 差異는 블랙·숄즈의 模型이 基礎證券에 대한 收益의 分散이 一定하다고 假定하고 있는데 대하여 CEV 模型은 株價에 따라 分散도 變한다는 것이다. 이에 대하여는 블랙도 收益의 分散이 株價와는 逆으로 움직인다는 것을 발견하였다.

MacBeth & Merville이 研究한 앞의 6個 證券의 경우에는 株價에 대한 分散이 株價

가 上昇함에 따라 감소하는 것으로 나타났다. 이들을 利用하여 CEV 模型과 블랙 · 숄즈의 模型을 比較 檢證한 결과 Cox 가 導出한 CEV 模型이 보다 정확하게 옵션의 市場價格을 반영하고 있다는 것을 알았다. 이러한 比較는 Beckers 에 의해서도 이루어졌으며 MacBeth & Merville 의 實證的 硏究와 同一한 結果를 얻었다.

以上에서 옵션에 대한 實證分析 結果와 새로운 代替模型을 살펴보았다. 이러한 代替模型들에 대하여 非母數檢證을 한 결과 Rubinstein 은 어느 模型도 모든 bias를 완전히 說明하지는 못하고 있음을 암시하였다. 따라서 OPM 의 妥當性에 대한 實證的 檢證과 諸 模型의 評價는 계속될 것이다.

Ⅳ. OPM의 擴張과 活用

옵션價格決定理論은 많은 非現實的인 假定의 緩和와 實證的 檢證을 통해 急速히 發展하여 왔으며, 去來形態도 一般的인 株式옵션 이외에 株價指數옵션去來, 債券옵션去來 및 外換옵션去來 등으로 多樣化 되었다.

以下에서는 新型옵션去來에 대하여 살펴본 후 OPM 의 活用에 대하여 알아보고자 한다. 新型옵션去來의 하나인 株價指數옵션은 株式投資의 體系的 危險까지 전가시키려는 옵션거래라 할 수 있다. 이러한 株價指數 옵션去來는 先物去來에서 채택한 주가지수 先物去來보다 늦기는 했지만 대체로 활발하게 거래되고 있는데 그 이유는 주가지수 옵션去來를 취급하는 證券業者의 수가 先物去來業者의 수보다 많고 去來時에 證據金이 원칙적으로 필요없으며(일정한 賣渡옵션에 대해서는 증거금을 納入) 指數의 변동에 따라 추가증거금을 낼 필요가 없고 指數當 去來單位가 적기 때문이다.[16)]

債券옵션去來는 利子率의 變動이나 자금조달운용수익율의 變動에 대비하기 위해 債券을 옵션으로 去來하는 것이다. 이 去來 역시 Chicago 商品去來所에서 1975年 10月에 先物去來로 시작되었고 채권옵션去來 역시 1982年 10月에 Chicago 商品去來所에서 시작된 이래 CBOE 와 AMEX가 재무부발행증권을 대상으로 채권옵션去來를 행하고 있다. 옵션去來의 대상이 되는 債券은 短期 · 中期 · 長期의 재무부발행증권, 新種商業어음 등인데, 이 중

16) 尹桂燮, "選擇權附 價格決定理論에 관한 硏究," 産業과 經營, 第21卷 第1號, *Yonsei Business Review* 21-1 (March, 1984), pp. 165-166.

에서 長期 財務部發行證券의 去來量이 계속 증대하고 있는데 그 이유는 長期債券일수록 金利變動의 危險을 많이 받기 때문이라고 하겠다.17)

한편 1982年 12月 필라델피아證券去來所에서 英國 파운드貨를 시점으로 C$, DM, ¥, SFr 등에 대한 外換옵션이 上場去來되고 암스테르담의 유럽옵션去來所에서도 外換옵션이 去來됨으로써 外換옵션에 대한 硏究와 더불어 去來의 活性化를 위한 方案들이 마련되었다. 外換 OPM은 Garman-Kohlhagen의 模型, Grabbe의 模型 등이 있는데 株式 OPM과의 근본적인 차이점은 株式옵션價格決定에서는 株式에 대한 無配當을 고려하여도 옵션價格決定節次上 問題가 없으나 外換옵션價格決定에서는 資産으로서 外換에 대한 無危險利子率을 반드시 고려하여야 한다는 점이다.18) 이러한 外換옵션은 換危險의 헷징에 대한 새로운 手段으로서 그 重要性이 크다 하겠다.

OPM은 비단 콜 옵션의 價格을 評價하는데 利用될 수 있을 뿐만 아니라 企業의 資本構造理論, 投資決定, conglomerate 合併 및 配當政策 등에도 利用될 수 있다. 이러한 OPM은 連續的 去來를 假定하고 있으며, CAPM과는 달리 投資者의 危險에 대한 태도나 市場포오트폴리오 등에 관한 假定을 하고 있지 않기 때문에 보다 現實的인 分析이 可能하다. 特히 OPM을 CAPM과 結合하면 體系的 危險 β의 不安定性이나 이의 決定要因 및 이들 간의 關係를 一貫性있게 보여 줄 수 있으며 最適資本構造에 대하여도 說明할 수 있다.

우리나라에는 아직 組織化된 옵션市場은 없으나 新株引受權附社債와 轉換證券 등의 評價에 OPM을 利用할 수 있다. 特히 여러가지 利點이 있는데도 우리나라에서 轉換社債나 新株引受權附社債가 제대로 發行·消化되지 않은 理由는 이들 證券에 대한 合理的 評價가 안되고 있었기 때문이라 하겠다.19) 따라서 옵션에 대한 理論的 硏究와 이들 理論을 우리나라의 事例에 적용시킬 수 있는 方案을 모색할 필요가 있다는 것이다. 아울러 우리나라 企業들의 國際化에 따라 附隨的으로 發生하는 換危險의 헷징手段으로서 外換옵션에 대한 理解도 必要하다 하겠다.

---

17) Ibid., p. 166.

18) 金益宅, "外換옵션價格決定에 관한 硏究", 經營學 碩士學位論文, 서울大學校 大學院, 1985.

19) 尹桂燮, op. cit., pp. 171-182.

V. 結　　語

1973年에 CBOE가 開場되고 블랙과 숄즈가 옵션에 대한 均衡價格模型을 導出한 以來 옵션理論은 급속히 發展하여 왔다. 이러한 옵션理論은 企業財務의 各 分野에 幅넓게 적용되고 있으며 옵션契約이나 去來形態도 多樣化되고 있다. 本稿는 最近에 들어 그 重要性이 漸增하고 있는 옵션의 市場構造와 投資對象으로서 옵션의 去來戰略을 살펴보았다. 이어서 OPM의 導出을 위한 諸 接近方法과 OPM에 대한 實證的 硏究들을 考察하였다. 블랙과 숄즈의 模型을 基本으로 하여 OPM을 擴張·發展시킨 이들 硏究에서 알 수 있는 것은 OPM의 實證分析에는 아직 많은 과제가 있다는 것이다.

이러한 理論的 考察에 이어 OPM의 擴張과 適用可能性을 살펴보았다. 우리나라에는 아직 組織化된 옵션市場은 없으나 新株引受權附社債나 轉換證券 등의 合理的인 評價에 OPM을 活用할 수 있으며 또한 企業의 國際化에 따른 海外資本市場接近을 위해서도 OPM을 理解하여야 할 필요가 있다고 하겠다. 特히 우리나라는 證券市場 國際化 推進의 2단계 조치로 85年 11月 國內企業이 國際資本市場에서 新株引受權附社債, 轉換社債 및 株式預託證券 등을 發行할 수 있도록 하였다. 이중 新株引受權附社債나 轉換社債 등은 原來의 옵션은 아니나 廣義의 옵션去來로 볼 수 있어 이들에 대한 合理的 評價는 중요한 과제가 되었다. 더욱이 資本自由化 措置가 계속됨에 따라 우리나라 企業들은 다양한 國際金融手段을 利用할 수 있는 능력배양과 換危險을 헷지하기 위한 方案을 모색하여야 할 입장에 있다. 따라서 危險헷징수단으로서 옵션去來와 先物去來(future contract)의 比較檢討는 물론 換危險헷징수단으로서 外換옵션去來나 外換先物去來(foreign currency future)에 대하여 관심을 두어야 하겠다.