

환율 변동의 예측과 카오스에 관한 모의실험

A Simulation Study on Expectation and Chaos in the Exchange Rate Movements

박승준¹⁾

국문초록

본 연구에서는 이산 시간적 차분방정식으로 전환한 Dornbusch의 통화론적 모형에 다양한 예측 모형을 접목하여 예측 방법에 따라 환율의 동태적 변화 패턴이 어떻게 달라지는지 모의 실험을 통하여 분석해 보았다. 예측 모형으로는 이동평균모형, 운동량모형, 필터모형 등 과거 환율 시계열에 대한 정보를 이용하는 기술주의적 예측 방법과 단기균형 환율과 장기균형 환율 등 환율 모형에 관한 정보를 이용하는 근본주의적 예측 방법을 도입하여 이들 간의 중도적 상호 작용이 카오스의 출현에 어떤 영향을 미치는지 알아보았다.

근본주의적 예측에 해당하는 음(-)의 피드백이 상대적으로 강하면 장기균형으로 수렴하고, 기술주의적 예측에 해당하는 양(+)의 피드백이 상대적으로 강하면 장기균형으로부터 발산한다. 이 두 가지의 힘이 중도적으로 상호작용을 할 때 카오스들이 나타나며 이러한 카오스들 사이에 단기 순환과 장기 순환이 간헐적으로 나타난다. 또한 기술주의적 예측에서 차지하는 이동 평균모형, 운동량모형, 필터모형의 비중과 근본주의적 예측에서 차지하는 장, 단기 근본주의의 비중이 달라짐에 따라 다양한 형태의 분기가 발생한다.

모의실험에서 나타나는 극한순환에서 카오스로 분기하는 여러 가지 경로에 대한 수학 이론적 분석, 예측과 자본자유화 정도 간의 상호작용이 환율 변동에 미치는 영향에 대한 모의실험, 진화를 통해 카오스가 발생하는 과정에 대한 유전자 알고리즘을 이용한 연구가 추후 요구된다.

주제어 : 양의 피드백, 음의 피드백, 중도적 예측, 카오스, 극한순환, 분기, 리아푸노프 지수, 상관차원.

I. 서론

본 연구에서는 이산 시간적 차분방정식으로 전환한 Dornbusch의 통화론적 모형에 다양한 예측 모형을 접목하여 예측 방법에 따라 환율의 동태적 변화 패턴이 어떻게 달라지는지 모의 실험을 통하여 분석해 보기로 한다. 예측 모형으로는 이동평균(MA)모형, 운동량(MM)모형, 필터(FR)모형 등 과거 환율 시계열에 대한 정보를 이용하는 기술주의적 예측 방법과 단기균형

1) 단국대학교 상경대학 경제학 교수.

환율과 장기균형 환율 등 환율 모형에 관한 정보를 이용하는 근본주의적 예측 방법을 도입하여 이들 간의 중도적 상호 작용이 카오스의 출현에 어떤 영향을 미치는지 알아본다.

근본주의적 예측에 해당하는 음(-)의 피드백과 기술주의적 예측에 해당하는 양(+)의 피드백이 중도적으로 상호작용을 할 때 카오스들과 이러한 카오스들 사이에 단기 순환과 장기 순환이 어떻게 나타나는지, 또한 기술주의적 예측에서 차지하는 이동평균(MA)모형, 운동량(MM)모형, 필터(FR)모형의 비중과 근본주의적 예측에서 차지하는 장, 단기 근본주의의 비중이 달라짐에 따라 어떠한 형태의 분기(Bifurcation)들이 발생하는지 알아본다.

이를 위해 응용 프로그램 Mathematica를 이용하여 모의실험¹⁾을 하고, 프로그래밍 언어인 C++ 과 Mathlink로 연결하여 리아푸노프 지수와 상관차원을 계산하여²⁾ 모의실험 결과를 분석한다.

II. Dornbusch 모형

이산 시간적으로 전환한 Dornbusch(DM)모형은 다음과 같은 9개의 수식으로 이루어져 있다.

$$y_t^s = y \quad (\text{GS})$$

$$y_t^d = -\beta_r r_t + \beta_e (e_t - p_t) + b, \quad \beta_r, \beta_e > 0$$

(GD)

$$p_{t+1} = p_t + \beta(y_t^d - y_t^s), \quad \beta > 0$$

(PA)

$$m - p_t = -\alpha_r r_t + \alpha_y y + a, \quad \alpha_r, \alpha_y > 0$$

(ME)

$$T_t = \delta_e (e_t - p_t) - \delta_y y + d, \quad \delta_e, \delta_y > 0$$

(TB)

$$r^* + {}_t e_{t+1}^e - e_t = r_t \quad (\text{BD})$$

$$F_t^d = F_t$$

(BE)

$$F_{t+1} - F_t = T_t \quad (\text{IB})$$

$${}_t e_{t+1}^e = \theta_p p_t + \theta_F F_t + \theta_e e_t + \theta \quad (\text{EE})$$

모형에서 사용한 9개의 내생변수들은 다음과 같다.

1) 부록: Mathematica Program 참조.

2) 리아푸노프 지수와 상관차원을 계산할 수 있는 C++ 프로그램이 필요하신 분은 다음 e-mail 주소의 저자에게 연락 바람: sjparkka@nuri.net.

y_t^s : 재화공급에 대한 로그 값

y_t^d : 재화수요에 대한 로그 값

p_t : 물가에 대한 로그 값

e_t : 환율에 대한 로그 값

r_t : 이자율

${}_t e_{t+1}^e$: t 기에 예측한 $t+1$ 기의 환율에 대한 기대환율의 로그 값

T_t : 외화단위로 나타낸 무역수지

F_t^d : 외국 채권에 대한 수요

F_t : 외국 채권에 대한 공급

이들 중 처음 5개는 재화공급, 재화수요, 물가, 환율, 기대환율, 그리고 통화 공급량의 로그 값들이고, 나머지 4개는 로그를 취하지 않은 무역수지, 외국채권수요, 외국채권공급량, 이자율 임에 유의하자.

또한, 모형에서 사용한 17개의 외생변수들과 파라메타들은 다음과 같다.

y : 재화의 주어진 공급량

β_r : 재화수요의 이자율에 대한 반응상수

β_e : 재화수요의 실질환율에 대한 반응상수

b : 재화 수요에 영향을 미치는 기타 요인들의 로그 값

β : 물가조정속도

m : 외생적으로 주어진 통화 공급량의 로그

α_r : 실질 통화수요의 이자율에 대한 반응상수

α_y : 실질 통화수요의 국민소득에 대한 반응상수

a : 통화수요에 영향을 미치는 기타 요인들의 로그 값

δ_e : 무역수지의 실질 환율에 대한 반응상수

δ_y : 무역수지의 국민소득에 대한 반응상수

d : 무역수지에 영향을 미치는 기타 요인들

r^* : 외국 이자율

θ_p : 변수 p_t 가 환율의 기대에 미치는 가중치

θ_F : 변수 F_t 가 환율의 기대에 미치는 가중치

θ_e : 변수 e_t 가 환율의 기대에 미치는 가중치

θ : 환율의 기대에 미치는 상수항

이와 같이 17개의 외생변수들과 파라메타들, 9개의 내생변수들로 표현된 9개의 수식으로 구성된 연립 차분방정식 체계의 특성을 간단히 요약하면 다음과 같다.

재화 시장에 있어 **재화공급**(Good Supply, GS)은 완전고용 수준에서의 생산량으로 고정되어 있다. **재화수요**(Good Demand, GD)는 이자율과 부(-)의 관계, 실질환율과는 정(+)의 관계에 있다. 재화 시장에 가격경직성의 가정을 도입하여 **가격조정**(Price Adjustment, PA)이 수식 (PA)와 같이 조금씩 이루어지므로 재화시장이 단기적으로는 불균형 상태에 있다. 계수 β 는 물가조정속도를 나타내고 물가의 경직도와 부(-)의 관계에 있다. β 가 무한대로 커지면, 즉, 물가조정이 무한대로 빠르게 이루어지면 재화시장이 즉시 균형에 도달한다. 하지만 현실경제에서는 조정속도가 유한하므로 재화시장의 불균형이 나타난다. 이 경우 불균형, 즉, 초과수요(공급)의 일부분만 가격 조정에 반영된다. 초과수요가 있을 때는 다음 기의 가격은 증가하고 초과공급 하에서는 가격이 감소한다.

수식(ME)는 **화폐시장균형**(Money Equilibrium, ME)을 나타낸다. 이자율과 부(-)의 관계, 국민소득과 정(+)의 관계에 있는 화폐에 대한 수요가 외생적으로 주어진 통화 공급량과 같다. 즉, 화폐시장에서는 이자율이 신축적으로 조정하여 재화시장에서와는 달리 즉각적으로 수요와 공급의 균형이 이루어진다.

외화단위로 나타낸 **무역수지**(Trade Balance, TB)는 실질환율과 정(+)의 관계에 있고, 국민소득과는 부(-)의 관계에 있다. **외국채권수요**(Foreign Bond Demand, BD)에 있어 국내채권과 외국채권 간의 완전 대체성을 가정하고 있다. 따라서 이자율평가(IRP : Interest Rate Parity)에 의해 수식(BD)가 성립된다. 이 수식의 좌변은 외국 채권에 대한 기대수익율이고, 이를 우변의 국내 채권의 수익률인 국내 이자율과 비교하여 외국 채권에 대한 수요를 결정한다. 완전 대체성 하에서는 국내채권과 외국채권이 완전한 동질성을 가지므로 이들 간의 기대수익율이 같아져서 이자율평가(IRP)에 해당하는 수식(BD)가 성립된다. 이 수식이 성립되지 않는다면, 즉, 외국 채권에 대한 기대수익률과 국내 채권에 대한 수익률에 차이가 있게 되면, 수익률이 높은 채권으로 신속하게 대체가 일어나 수익률이 재조정되어 같아지게 된다. 이와 같이 외국 채권에 대한 기대수익률과 국내 채권에 대한 수익률이 같을 때는 외국 채권과 국내 채권에 대한 선호도에 차이가 없으므로, 외화단위로 나타낸 외국 채권에 대한 수요 $F^d(t)$ 는 임의적이라는 것에 유의하여야 한다. 그리고 완전한 자본 이동성의 가정 하에서 **채권시장균형**(Bond Market Equilibrium, BE)이, 또한 변동환율제도하에서 **국제수지균형**(International Balance Equilibrium, IB)이 즉시 이루어진다.

마지막으로, **기대환율**(Expected Exchange Rate, EE)은 현재의 환율, 외국 채권 그리고 물가에 의해 선형적으로 의존하고, 각각에 의존하는 정도를 나타내는 계수 $\theta_p, \theta_F, \theta_e$ 의 값들은 합리적 기대, 적응적 기대, 기술주의적 기대, 진화론적 기대 등, 여러 가지 기대 형성에 관한 가정에 따라 달라진다. 이는 다음 장에서 다루기로 한다.

III. 완전예견에 의한 기대 형성

DM모형에 의해 기술되는 경제변수들, 특히 환율의 동태적 경로는 미래의 환율에 관한 예측

에 의존한다. 외국 채권에 대한 수요(BD)는 이자율평가(IRP : Interest Rate Parity) 개념을 이용하여 다음과 같이 정의했다.

$$r^* + {}_t e_{t+1}^e - e_t = r_t \quad (\text{BD})$$

DM모형에서 환율에 대한 기대는 채권에 대한 수요에 영향을 주고, 이는 다시 자본 시장을 통해 화폐시장 등 다른 시장들에 파급된다. 따라서 환율에 대한 기대는 환율의 결정에 상당한 영향을 미친다. 이 책에서는 다음과 같은 선형관계식으로 표현되는 기대환율(Expected Exchange Rate, EE) 형성과정을 고려하고 있다.

$${}_t e_{t+1}^e = \theta_p p_t + \theta_F F_t + \theta_e e_t + \theta \quad (\text{EE})$$

이 수식에서 계수 $\theta_p, \theta_F, \theta_e$ 는 각각 변수 p_t, F_t, e_t 가 환율의 기대에 미치는 가중치이고, θ 는 상수항이다. 이 계수들의 값들은 합리적 기대, 적응적 기대, 기술주의적 기대, 근본주의적 기대, 진화론적 기대 등, 여러 가지 기대 형성에 관한 가정에 따라 달라진다. 여기서는 완전예견에 의한 환율예측을 다룬다.

완전 예견이란 계수 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 들의 값에 의해 형성된 기대 하에서 환율의 동태적 경로가 예측한 바와 정확히 일치한다는 것이다. 따라서 다음과 같은 완전 예견을 표현하는 수식(Perfect Foresight, PF)이 성립된다.

$${}_t e_{t+1}^e = e_{t+1} \quad (\text{PF})$$

완전예견을 한다는 것은 확률적 모형에 있어서는 합리적 기대(Rational Expectation)에 해당하는 것으로 모형의 동태적 특징에 대해 정확히 알고 또한 완전한 수학적 분석이 가능하다는 것이다. 이러한 가정 하에 분석해 보면 완전예견을 보장하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 들이 만족해야 하는 연립방정식 체계와 부등식은 다음과 같다는 것을 보이하고자한다¹⁾.

$$(1 - \theta_e)\theta_p = (\theta_p - w_1)(1 - w_2 - w_3) \quad (\text{SPS-1})$$

$$\theta_F = 0$$

(SPS-2)

$$(1 - \theta_e)\theta_e = (\theta_p - w_1)w_2 \quad (\text{SPS-3})$$

$$\theta = \frac{1}{1 - \theta_e}((\theta_p - w_1)C_p + \theta - C_e) \quad (\text{SPS-4})$$

1) 박승준(1998)의 연속 시간 모형에 대한 도출 방법을 이산 시간적 모형에 수정, 적용하여 구할 수 있음.

$$|B| = \left| (1 - w_2 - w_3) + \frac{w_2}{1 - \theta_e} (\theta_p - w_1) \right| < 1$$

(SPS-5)

계산의 편의와 간편한 표현을 위해 다음과 같은 상수들을 도입하였다.

$$w_1 = \frac{1}{\alpha_r}, w_2 = \beta\beta_e, w_3 = \frac{\beta\beta_r}{\alpha_r}$$

$$C_p = w_3 m - (w_3 \alpha_y + \beta)y - w_3 a + \beta b$$

$$C_e = -\frac{1}{\alpha_r} m + \frac{\alpha_y}{\alpha_r} y - r^* + \frac{1}{\alpha_r} a$$

이 체계(SPS)를 만족하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 하에서는 안장점 안정성(Saddle Point Stability, SPS)이 성립된다. 즉, 이러한 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 하에서는 p_t, F_t 가 주어질 때 외환시장에서 현재의 상태를 고려하여 미래를 예측하고 그 예측이 다시 현재를 변화시키는 완전한 예측과정을 통해 현재의 상태를 즉시 안장경로에 진입하도록 단기균형 환율(SR-ER) \hat{e}_t 가 결정된다. 그 후 안장평면내의 경로를 따라 움직이도록 함으로써 장기균형점 $E = (\bar{p}, \bar{F}, \bar{e})$ 으로 수렴하도록 한다. 즉, 연립방정식 체계(SPS)를 만족하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 하에서 수식(EE)에 따라 완전예건을 함으로써 안장점 안정성이 보장된다.

이 안장점 안정성을 증명하기 위해 수식(ME)를 r_t 에 대해 풀면 다음과 같다.

$$r_t = \frac{1}{\alpha_r} p_t - \frac{1}{\alpha_r} m + \frac{\alpha_y}{\alpha_r} y + \frac{a}{\alpha_r} \quad (\text{IR})$$

이를 수식(GD)에 대입하여 그 결과를 수식(GS)와 함께 수식(PA)에 대입하면 다음과 같은 p_{t+1} 에 관한 수식(p-Next)을 얻는다.

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t + \beta((- \beta_r r_t + \beta_e (e_t - p_t) + b - y)) \\ &= (1 - \frac{\beta\beta_r}{\alpha_r} - \beta\beta_e) p_t + \beta\beta_e e_t + \frac{\beta\beta_r}{\alpha_r} m - (\frac{\beta\beta_r}{\alpha_r} \alpha_y + \beta)y - \frac{\beta\beta_r}{\alpha_r} a + \beta b \\ &= (1 - w_2 - w_3) p_t + w_2 e_t + C_p \end{aligned}$$

(p-Next)

수식(TB)를 수식(IB)에 대입하면 다음과 같은 F_{t+1} 에 관한 수식(F-Next)을 얻는다.

$$\begin{aligned}
F_{t+1} &= F_t + \delta_e(e_t - p_t) - \delta_y y + d && \text{(F-Next)} \\
&= -\delta_e p_t + F_t + \delta_e e_t + C_F \\
C_F &= -\delta_y y + d
\end{aligned}$$

수식(IR)로부터 r_t 와 수식(PF)로부터 ${}_t e_{t+1}^e$ 를 수식(BD)에 대입하여 이를 e_{t+1} 에 대해 풀면 다음과 같은 수식(e-Next)을 얻는다.

$$\begin{aligned}
e_{t+1} &= -r^* + e_t + \frac{1}{\alpha_r} p_t - \frac{1}{\alpha_r} m + \frac{\alpha_y}{\alpha_r} y + \frac{a}{\alpha_r} \\
&= w_1 p_t + e_t + C_e && \text{(e-Next)}
\end{aligned}$$

이상의 3개의 차분방정식들을 행렬로 표현하면 다음과 같으며, 이를 **DM모형(PF)의 차분방정식 체계**(Difference Equation System, **DES**)라고 부르자.

$$\begin{bmatrix} p_{t+1} \\ F_{t+1} \\ e_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-w_2-w_3 & 0 & w_2 \\ -\delta_e & 1 & \delta_e \\ w_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ F_t \\ e_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_p \\ C_F \\ C_e \end{bmatrix} \quad \text{(DES)}$$

이 차분방정식 체계를 살펴보면 외국 채권 F_t 는 p_t, e_t 에 영향을 주지 못한다. 즉, DM모형(PF)에서 p_t, e_t 의 동태적 경로는 F_t 에 의존하지 않는다. 따라서 차분방정식 체계(DES)로부터 다음과 같은 p_t, e_t 에 관한 2원 차분방정식 체계(DES-p&e)를 분리하여 분석하는 것이 편리하다.

$$\begin{bmatrix} p_{t+1} \\ e_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-w_2-w_3 & w_2 \\ w_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ e_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_p \\ C_e \end{bmatrix} \quad \text{(DES-p\&e)}$$

여기에 $p_{t+1} = p_t = \bar{p}$, $e_{t+1} = e_t = \bar{e}$ 을 대입하면, 물가와 환율의 장기균형 값((LR-PL, LR-ER)을 구할 수 있다.

$$\bar{p} = (1-w_2-w_3)\bar{p} + w_2\bar{e} + C_p, \bar{e} = w_1\bar{p} + \bar{e} + C_e \Rightarrow$$

$$\bar{p} = -\frac{1}{w_1} C_e$$

(LR-PL)

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \frac{1}{w_2}((w_2 + w_3)\bar{p} - C_p) = \frac{1}{w_2}((w_2 + w_3)(-\frac{1}{w_1}C_e) - C_p) & (\text{LR-ER}) \\ &= -\frac{w_2 + w_3}{w_1 w_2}C_e - \frac{1}{w_2}C_p\end{aligned}$$

완전예건을 보장하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 들이 만족해야 하는 연립방정식 체계는 다음과 같이 미정계 수법에 의해 구할 수 있다. 먼저 수식(DES)에서 보는 바와 같이 p_t, e_t 의 동태적 경로는 F_t 에 의존하지 않으므로, 완전예건 하에서는 환율에 대한 예측도 F_t 에 의존하지 않는다.

$$\theta_F = 0$$

완전예건에 해당되는 수식(PF)가 성립되므로 수식(EE)와 수식(e-Next)를 같이 놓으면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\theta_p p_t + \theta_e e_t + \theta &= w_1 p_t + e_t + C_e \\ \Rightarrow e_t &= \frac{1}{1 - \theta_e}((\theta_p - w_1)p_t + \theta - C_e)\end{aligned}$$

t 에 $t+1$ 을 대입하고 그 결과에 수식(p-Next)와 수식(F-Next)를 대입하자.

$$\begin{aligned}e_{t+1} &= \frac{1}{1 - \theta_e}((\theta_p - w_1)p_{t+1} + \theta - C_e) \\ &= \frac{1}{1 - \theta_e}((\theta_p - w_1)((1 - w_2 - w_3)p_t + w_2 e_t + C_p) + \theta - C_e) \\ &= \frac{1}{1 - \theta_e}((\theta_p - w_1)(1 - w_2 - w_3)p_t \\ &\quad + (\theta_p - w_1)w_2 e_t \\ &\quad + (\theta_p - w_1)C_p + \theta - C_e)\end{aligned}$$

이 수식은 완전예건(${}_t e_{t+1}^e = e_{t+1}$) 하에서는 수식(EE)와 동일해야 하므로, 두 식의 계수 비교를 통해 다음의 4개의 식을 얻고 이를 간단히 정리하면 완전예건을 보장하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 들이 만족해야 하는 연립방정식 체계(SPS-1,2,3,4)가 된다.

이 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 에 대한 4원 연립방정식 체계(SPS-1,2,3,4)는 실질적으로는 2원 연립방정식 체계이다. 즉, 수식(SPS-1,3)은 θ_p, θ_e 에 대한 독립적인 2원 2차 연립방정식 체계이며, 이로부터 구한 θ_p, θ_e 에 대한 해를 수식(SPS-4)에 대입하면 θ 에 대한 해를 구할 수 있다. 이와 같

이 결정되는 완전예건을 보장하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 들 하에서 이산 시간적 DM모형(PF)의 동태적 경로를 정리하여 보면 다음과 같다.

먼저 단기적으로 변수 p_t, F_t 가 주어져 있다 하자. 그러면 수식(ME)를 이자율 r_t 에 대해 풀면 단기균형 이자율(SR-IR) \hat{r}_t 가 다음과 같이 결정된다.

$$\hat{r}_t = \frac{1}{\alpha_r} p_t - \frac{1}{\alpha_r} m + \frac{\alpha_y}{\alpha_r} y + \frac{a}{\alpha_r} \quad (\text{SR-IR})$$

이 단기균형 이자율 하에서 수식(BD)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} r^* + {}_t e_{t+1}^e - e_t - \hat{r}_t &= 0 \\ \Rightarrow e_t &= -{}_s \hat{r}_t + r^* + {}_t e_{t+1}^e \end{aligned}$$

여기에 완전예건을 보장하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 들 하에서의 환율에 대한 기대형성 수식(EE)를 대입하자.

$$e_t = -\hat{r}_t + r^* + (\theta_p p_t + \theta_e e_t + \theta)$$

이를 환율 e_t 에 대해 풀고 그 결과에 앞서 결정된 수식(SR-IR)의 단기균형 이자율 \hat{r}_t 을 대입하면 그 단기균형 환율(SR-ER) \hat{e}_t 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{e}_t &= \frac{1}{1-\theta_e} (r^* + (\theta_p p_t + \theta) - \hat{r}_t) \\ &= \frac{1}{1-\theta_e} (r^* + (\theta_p p_t + \theta) - (\frac{1}{\alpha_r} p_t - \frac{1}{\alpha_r} m + \frac{\alpha_y}{\alpha_r} y + \frac{a}{\alpha_r})) \\ &= \frac{1}{1-\theta_e} (\theta_p - w_1) p_t + C \end{aligned}$$

(SR-ER)

$$C = \frac{1}{1-\theta_e} (w_1 m - w_1 \alpha_y y + r^* + \theta - w_1 a)$$

위의 수식(SR-ER)은 p_t 가 주어질 때 외환시장에서 현재의 상태를 고려하여 미래를 예측하고 그 예측이 다시 현재를 변화시키는 완전한 예측과정을 통해 현재의 상태를 즉시 안정경로에 진입하게 한다. 즉, 안정점 안정성을 보장한다. 안정점 안정성에 대해서는 연속 시간적 (continuous time) DM모형(PF)을 다룰 때 자세히 분석하였으므로 여기서는 그 골자만 간단히 살펴보기로 한다.

DM모형(PF)의 동태적 경로는 수식(DES-p&e)와 같이 p_t, e_t 에 대한 2개의 차분방정식들로 표현될 수 있다. 이 차분방정식 체계(Difference Equation System, DES)의 고유치(Eigenvalue)중 하나, 즉, λ_2 의 절대값은 1보다 크고 다른 하나인 λ_1 은 절대값이 1보다 작다.

고유치의 절대값이 $|\lambda_1| < 1$ 과 $|\lambda_2| > 1$ 이므로 차분방정식 체계의 해(Solution)를 생성하는 기저인 λ_1^t 는 0으로 수렴하고, λ_2^t 는 무한대로 발산한다. 따라서 차분방정식 체계(DES-p&e)의 균형, 즉, DM모형(PF)의 장기균형점 $E=(\bar{p}, \bar{e})$ 은 안장점(Saddle Point)이다.

안장점의 동태적 특성은 장기균형점 E로의 수렴경로가 극히 제한적이라는 것이다. f_1 과 f_2 를 각각 λ_1 과 λ_2 에 대응되는 고유벡터(Eigenvector)들이라고 하자. 이 고유벡터들에 의해 생성되는 1차원 벡터공간 V_1 과 V_2 는 각각 λ_1 과 λ_2 에 대응되는 고유공간(Eigenspace)라고 부른다. 고유공간 V_1 위에서는 λ_1 의 비율로 장기균형점 $E=(\bar{p}, \bar{e})$ 로 수렴해 가고, 고유공간 V_2 위에서는 λ_2 의 비율로 장기균형점 $E=(\bar{p}, \bar{e})$ 로부터 무한대로 멀어져 간다. 또한 V_1 과 V_2 를 벗어난 곳에서의 동태적 경로는 이들 두 공간에서의 경로의 선형결합을 따르므로 장기균형점으로부터 무한대로 발산하게 된다.

따라서 가격과 환율이 장기균형점 $E=(\bar{p}, \bar{e})$ 으로 수렴하기 위해서는 음수의 고유치 λ_1 에 대응되는 고유공간 V_1 위의 경로를 따라가야 한다. 이러한 맥락에서 V_1 을 안장경로(Saddle Path, SP)라고 부른다. 장기균형점을 벗어나도 항상 안장경로에 진입하여 그 경로를 따라 장기균형점에 다시 수렴하는 것이 보장되는 것을 안장점 안정성(Saddle Point Stability, SPS)이라 한다.

완전예견(${}_t e_{t+1}^e = e_{t+1}$) 하에서는 수식(SR-ER)에서와 같이 p_t 가 주어질 때 외환시장에서 현재의 상태를 고려하여 미래를 예측하고 그 예측이 다시 현재를 변화시키는 완전한 예측과정을 통해 현재의 상태를 즉시 안장경로에 진입하도록 단기균형 환율(SR-ER) \hat{e}_t 가 결정된다. 즉, 안장점 안정성을 보장한다. p_t, e_t 가 2개의 차분방정식들로 표현되는 차분방정식 체계(DES-p&e)의 2차원 상태공간(State Space), $p-e$,의 점들 중에서 수식(SR-ER)를 만족하는 1차원 공간, 즉, 안장경로를 따라 움직이도록 함으로써 장기균형점 $E=(\bar{p}, \bar{e})$ 으로 수렴하도록 한다. 다시 말해서 완전예견을 보장하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 들 하에서 수식(SR-ER)에 의해 단기균형 환율 \hat{e}_t 가 결정된다는 것은 p_t 가 어떠한 값으로 주어지더라도 p_t, e_t 가 항상 안장경로에 진입하도록 환율 e_t 가 즉시 조정된다는 것이다.

나머지 변수들의 단기균형은 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned}
 {}_t \hat{e}_{t+1}^e &= \theta_p p_t + \theta_e e_t + \theta & (SR-EE) \\
 \hat{y}_t^s &= y & (SR-GS) \\
 \hat{y}_t^d &= -\beta_r \hat{r}_t + \beta_e (\hat{e}_t - p_t) + b & (SR-GD)
 \end{aligned}$$

$$\widehat{T}_t = \delta_e(\widehat{e}_t - p_t) - \delta_y y + d$$

(SR-TB)

$$\widehat{F}_t^d = F_t \quad (\text{SR-BD})$$

이 값들을 DM모형의 가격 조정 식(PA)에 대입하면, 다음과 같이 다음기의 재화시장의 가격 p_{t+1} 이 결정된다.

$$p_{t+1} = p_t + \beta(\widehat{y}_t^d - \widehat{y}_t^s)$$

이를 p_t 만의 차분방정식으로 정리하기 위해 앞에서 유도한 다음 수식들을 이용하자.

$$p_{t+1} = (1 - w_2 - w_3)p_t + w_2\widehat{e}_t + C_p \quad (\text{p-Next})$$

$$\widehat{e}_t = \frac{1}{1 - \theta_e}(\theta_p - w_1)p_t + C \quad (\text{SR-ER})$$

수식(SR-ER)은 p_t, e_t 가 $p-e$ 의 2차원 공간상에 있는 1차원 안장경로에 머무르도록 보장해 준다. 따라서 수식(SR-ER)을 수식(p-Next)에 대입하면 $p-e$ 의 2차원 공간상에 있는 1차원 안장경로상의 동태적 움직임을 1차원 직선인 e 축으로 정사영(projection)하게 된다. 따라서 e 축 위에서 p_t 에 관한 차분방정식(DES-p)를 얻는다.

$$p_{t+1} = Bp_t + C_p - C \quad (\text{DES-p})$$

여기서 계수 B 는 다음과 같다.

$$B = (1 - w_2 - w_3) + \frac{w_2}{1 - \theta_e}(\theta_p - w_1)$$

이 p_t 에 관한 차분방정식(DES-p)는 안장경로상의 운동을 기술하고 있으므로 동태적으로 안정적이어야 한다. 따라서 계수 B 의 절대값이 $|B| < 1$ 을 만족해야 한다. 즉 위의 부등식 (SPS-5)이 성립되어야 한다. 이는 완전예건을 보장하는 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 들이 만족해야 하는 연립방정식 체계(SPS-1,2,3,4)의 해가 여러 개 존재하는 것이 일반적이므로 이들 중 안장점 안정성을 보장하는 유일한 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 값을 판별하는데 유용하다.

지금까지의 논의를 정리하면 완전예건 하에서 안장점 안정성을 보장하는 유일한 $\theta_p, \theta_F, \theta_e, \theta$ 값은 다음을 만족한다.

$${}_t e_{t+1}^e = \theta_p p_t + \theta_F F_t + \theta_e e_t + \theta \quad \text{와} \quad \text{수식} \quad \text{SPS-1,2,3,4,5}$$

(EE-PF)

IV. 중도예측에 의한 기대 형성

1. 기술주의적 환율예측

기술주의자(Technicalist)는 자기회귀(Auto Regression)의 방법을 사용하여 환율을 예측한다. 즉, 환율모형에 포함되어 있는 정보는 이용하지 않고, 과거의 환율 자료를 이용하여 미래의 환율이 어떻게 움직일 것인가를 예상하는 것이다. 따라서 기술주의자의 환율 예측에 관한 식(Technicalist Expectation, TE)은 다음과 같이 과거 T 기간 동안에 실현된 환율들의 함수 f 로 표현할 수 있다.

$${}_t e_{t+1}^e = f(e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-T})$$

과거 환율들의 함수 f 는 주로 선형함수로 가정된다. 이 경우 함수 f 는 과거 환율들의 가중 평균에 해당된다. 평균에 사용되는 가중치를 결정하는 방법에 따라 기술주의자의 예측 모형은 이동평균 모형(Moving Average Model, MA), 운동량 모형(Momentum Model, MM), 필터 모형(Filter Rule Model, FR)으로 나눌 수 있다.

이동평균 모형(Moving Average Model, MA)은 과거 환율들의 단기 이동평균(Short Run Moving Average, SMA)과 장기 이동평균(Long Run Moving Average, LMA)를 비교하여 미래의 환율 변화에 대한 예측을 한다.

$${}_t e_{t+1}^e [MA] = e_{t-1} + \gamma_{TE} (SMA - LMA), \gamma_{TE} > 0$$

(TE-MA)

이 예측 식(TE-MA)에 의하면 기술주의자는 단기의 이동평균이 장기 이동평균보다 큰 경우에는 환율이 상승할 것이라 예상하며 이와 반대인 경우에는 환율이 하락할 것이라고 예상한다. 예측조정계수 γ_{TE} 는 기술주의자가 환율 예상에 이동평균의 차를 반영하는 정도를 나타낸다. γ_{TE} 가 클수록 예측이 이동평균의 차이에 대해 더욱 민감하게 반응하게 된다.

단기 이동평균(SMA)과 장기 이동평균(LMA)은 장·단기에 대한 기간 설정에 의존하게 된다. 여기에서는 단기 이동평균은 최근 한 기간 동안의 환율 변화, 장기 이동평균은 최근 두 기간 동안의 환율 변화의 산술 평균으로 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$SMA_{t-1} = e_{t-1} - e_{t-2}$$

$$LMA_{t-1} = \frac{1}{2} ((e_{t-1} - e_{t-2}) + (e_{t-2} - e_{t-3}))$$

운동량 모형(Momentum Model, MM)에 의한 환율 예측은 주어진 임의의 특정 운동량시차(τ) 사이의 환율 격차, 즉 운동량(MM)이 증가하느냐 감소하느냐에 의존한다.

$${}_t e_{t+1}^e [MM] = e_{t-1} + \gamma_{TE}(MM_{t-1} - MM_{t-2}), \gamma_{TE} > 0$$

(TE-MM)

$$MM_t = e_t - e_{t-\tau}$$

예측조정계수 γ_{TE} 는 기술주의자가 환율 예상에 운동량의 변화를 반영하는 정도를 나타낸다. γ_{TE} 가 클수록 예측이 운동량의 변화에 대해 더욱 민감하게 반응하게 된다. 식(TE-MM)에 의하면, 특정 기간(τ) 사이의 환율 격차, 즉 운동량(MM)이 전 기($t-1$)에 증가하면 다음 기($t+1$)의 환율은 증가한다고 예측하고, 반대의 경우에는 감소한다고 예측한다. 여기서는 이 특정 기간(τ)을 5로 한다.

필터 모형(Filter Rule Model, FR)에서는 과거의 환율들 중에 최근으로부터 가장 가까운 극대점(Local Maximum, e^M)과 극소점(Local Minimum, e^m)을 준거로 미래의 환율을 예측한다. 환율이 오를 때는, 극소점보다 임의의 주어진 필터율, f 퍼센트 이상 증가할 경우에는 미래의 환율이 오를 것이라고 예측하고 그렇지 않을 경우에는 환율이 기존의 수준에 머물 것이라고 예상한다. 반면에 환율이 내릴 때는, 극대점보다 임의의 주어진 f 퍼센트 이하로 감소할 경우에는 미래의 환율이 내릴 것이라고 예측하고 그렇지 않을 경우에는 환율이 기존의 수준에 머물 것이라고 예상한다.

$$\begin{aligned} {}_t e_{t+1}^e [FR] &= e_{t-1} + \gamma_{TE}(e_{t-1} - e^m(1+f)), \text{ if } e_{t-1} > e_{t-2} \text{ and } e_{t-1} > e^m(1+f) \\ &= e_{t-1} + \gamma_{TE}(e_{t-1} - e^M(1-f)), \text{ if } e_{t-1} < e_{t-2} \text{ and } e_{t-1} < e^M(1-f) \\ &= e_{t-1}, \text{ otherwise} \end{aligned}$$

(TE-FR)

계수 γ_{TE} 는 기술주의자가 환율 예상에 기준점과의 격차를 반영하는 정도를 나타낸다. γ_{TE} 가 클수록 예측이 기준점과의 격차에 대해 더욱 민감하게 반응하게 된다.

기술주의자의 예측(TE)은 다음과 같이 이동평균 모형(MA), 운동량 모형(MM), 필터 모형(FR)에 의한 예측들의 가중평균으로 주어진다.

$${}_t e_{t+1}^e [TE] = \tau_{MA} {}_t e_{t+1}^e [MA] + \tau_{MM} {}_t e_{t+1}^e [MM] + \tau_{FR} {}_t e_{t+1}^e [FR],$$

(TE)

where $\tau_{MA} + \tau_{MM} + \tau_{FR} = 1$

2. 근본주의자에 의한 환율예측

근본주의자(Fundamentalist)는 환율이 시간이 감에 따라 장기 균형 환율(\bar{e})로 수렴할 것이라고 가정하여, 환율이 균형 환율보다 높으면 점점 하락하고, 균형 환율보다 낮으면 점점 상승할 것이라고 예상한다. 따라서 근본주의자의 환율 예측에 관한 식(Fundamentalist Expectation, FE)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$${}_t e_{t+1}^e = e_{t-1} + \gamma_{FE}(\bar{e} - e_{t-1})$$

예측조정계수 γ_{FE} 는 근본주의자가 환율 예측에 균형 환율과의 격차를 반영하는 정도를 나타낸다. γ_{FE} 가 클수록 예측이 균형 환율과의 격차에 대해 더욱 민감하게 반응하게 된다.

DM모형의 장기균형(Long Run Equilibrium), \bar{e} 는 재화시장의 균형 상태($p_{t+1} = p_t$, Goods Market Equilibrium, GE), 이자율 평가(Interest Rate Parity, IRP)에 의한 자본시자의 균형, 화폐시장의 균형(Money Equilibrium, ME)에 해당되는 다음 3개의 식으로부터 유도된다.

$$y = -\beta_r \bar{r} + \beta_e (\bar{e} - \bar{p}) + b \tag{GE}$$

$$\bar{r} = r^*$$

(IRP)

$$m - \bar{p} = -\alpha_r \bar{r} + \alpha_y y + a$$

(ME)

위의 3개의 균형식(GE, IRP, ME)을 장기균형 이자율(Long Run Interest Rate, LR-IR), 물가의 장기균형 물가(Long Run Price Level, LR-PL), 장기균형 환율(Long Run Exchange Rate, LR-ER)에 대해 풀면 다음과 같다.

$$\bar{r} = r^* \tag{LR-IR}$$

$$\bar{p} = m + \alpha_r \bar{r} - \alpha_y y - a$$

(LR-PL)

$$\bar{e} = \bar{p} + \frac{1}{\beta_e} (\beta_r \bar{r} + y - b)$$

(LR-ER)

위와 같이 계산된 장기균형(Long Run, LR) 환율 \bar{e} 를 이용한 근본주의자의 환율 예측(Fundamentalist Expectation, FE)에 관한 식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$${}_t e_{t+1}^e = e_{t-1} + \gamma_{FE}(\bar{e} - e_{t-1}) \text{ 와 수식 LR-IR, PL, ER} \tag{EE-FE}$$

3. 중도적 환율예측

지금까지 완전 예견(PF), 기술주의적 예견(TE), 근본주의적 예견(FE) 등 3가지 유형의 환율 예측 모형을 소개하였다. 일반적으로 시장에는 이들 3가지 유형을 포함한 갖가지 유형의 환율 예측 모형들이 혼재해 있다고 볼 수 있다. 이러한 경우에는 앞에서 다룬 완전 예견은 합리적이 라고 할 수 없다. 왜냐하면 시장에 영향을 미치고 있는 다른 유형들의 예측들도 고려해야 진정 으로 완전한 예견이 되겠지만 그러지 못하고 있기 때문이다. 그러나 이러한 경우라 하더라도 경제 모형을 이용하여 예측하고 있으므로 근본주의적 방법을 사용하고 있다고 할 수 있다.

시장에 갖가지 유형의 환율 예측 모형들이 혼재해 있는 경우에 수식(EE-PF)를 이용하는 근 본주의적 예측은 장기적 균형만을 이용하는 수식(FE)에 의한 근본주의적 예측보다 더 많은 정 보를 이용하고 있다. 즉, 경직적인 변수들인 물가와 외국채권(p_t, F_t)등이 장기균형으로 수렴하 기 전의 단기적, 동태적 정보들도 예측에 활용하고 있다. 따라서 환율 예측 모형들이 혼재해 있는 경우, 수식(EE-PF)를 이용하는 방법을 단기 근본주의적 예측(Short Run Fundamentalist Expectation, SR-FE), 수식(FE)를 이용하는 방법을 장기 근본주의적 예측 (Long Run Fundamentalist Expectation, LR-FE)이라고 부르기로 한다.

$${}_t e_{t+1}^e[LF] = e_{t-1} + \gamma_{FE}(\bar{e} - e_{t-1}) \text{ 와 수식 LR-IR, PL, ER} \quad (\text{LR-FE})$$

$${}_t e_{t+1}^e[SF] = \theta_p p_t + \theta_F F_t + \theta_e e_t + \theta \text{ 와 수식 SPS-1, 2, 3, 4, 5} \quad (\text{SR-FE})$$

근본주의자의 예측(FE)은 다음과 같이 장기 근본주의적 예측(LR-FE)과 단기 근본주의적 예 측(SR-FE)들의 가중평균으로 주어진다.

$${}_t e_{t+1}^e[FE] = f_{LF} {}_t e_{t+1}^e[LF] + f_{SF} {}_t e_{t+1}^e[SF], \quad (\text{FE})$$

$$\text{where } f_{LF} + f_{SF} = 1$$

시장의 참여자들이 서로 다른 이질적 예측(Heterogeneous Expectation)을 하는 환경에서는 각각의 유형이 시장 환율에 대한 예측에서 차지하는 비중을 고려하여야 한다. 환율에 대한 시 장 전체의 예측은 이러한 비중을 고려한 각 유형의 가중평균으로 계산될 수 있다. 기술주의적 예측과 근본주의적 예측 등 2가지 유형이 존재하는 시장에서 기술주의적 예측의 t 기의 비중 을 ω_t 라고 하면 환율에 대한 시장 전체의 예측은 다음과 같다.

$${}_t e_{t+1}^e[MW] = \omega_t {}_t e_{t+1}^e[TE] + (1 - \omega_t) {}_t e_{t+1}^e[FE], \quad 0 \leq \omega_t \leq 1$$

(MW-EE)

이렇게 이루어지는 환율에 대한 예측을 중도적 환율 예측(Middle Way Expectation of Exchange Rate, MW-EE)이라고 부르기로 한다. 환율에 대한 시장 전체의 예측에 있어 기술

주의적 예측은 양(+)의 피드백(Positive Feedback), 근본주의적 예측은 음(-)의 피드백(Negative Feedback)의 역할을 한다.

환율이 상승하면 기술주의자들은 환율이 더욱 상승할 것이라고 예상하여 외환을 매입한다. 이는 환율의 추가 상승에 기여하게 된다. 반면, 환율이 하락하면 기술주의자들은 환율이 더욱 하락할 것이라고 예상하여 외환을 매각한다. 이는 환율의 추가 하락에 기여하게 된다. 이와 같이 기술주의자들의 예측은 환율의 상승에는 지속적인 상승을, 하락에는 지속적인 하락을 불러오는 양(+)의 피드백 역할을 한다. 한편, 근본주의자들은 환율이 균형 환율보다 높게 상승하면 환율이 균형으로 복귀하기 위해 하락할 것이라고 예상하여 외환을 매각한다. 이는 환율의 추가 상승에 제동을 걸고 환율 하락에 기여하게 된다. 반면, 환율이 균형 환율보다 낮게 하락하면 환율이 균형으로 복귀하기 위해 상승할 것이라고 예상하여 외환을 매입한다. 이는 환율의 추가 하락에 제동을 걸고 환율 상승에 기여하게 된다. 이와 같이 근본주의자들의 예측은 환율의 상승에는 하락을, 하락에는 상승을 불러와 균형으로의 복귀에 기여하는 음(-)의 피드백 역할을 한다.

기술주의자들은 균형으로부터 멀어져 가도록 하는 양(+)의 피드백을 도입하여 환율 변화에 불안정성과 역동성을 부여하고, 근본주의자들 균형으로 복귀하도록 하는 음(-)의 피드백을 도입함으로써 환율 변화에 안정성과 정태성을 부여한다. 이와 같이 서로 상반된 두 가지 힘인 양(+)의 피드백과 음(-)의 피드백이 상보적으로 작용하면서 다양한 환율 변동의 양상을 만들어 낸다. 이러한 중도적 환율 변화 체계가 어떠한 양상을 띠게 될 것인지는 두 가지 상반된 힘을 만들어 내는 기술주의적 예측과 근본주의적 예측이 시장 전체의 예측에서 차지하는 비중, ω_t , $1-\omega_t$ 에 의존한다.

기술주의적 예측과 근본주의적 예측의 가중치, ω_t , $1-\omega_t$ 는 시간에 따라 변하지 않고 일정한 경우도 있을 수 있으나, 일반적으로 시장의 상태와 여건에 따라 매우 복잡하게 상호 작용하면서 변화 한다고 볼 수 있다. 여기서는 시장의 현재 환율이 장기균형으로 얼마나 떨어져 있는가($e_{t-1} - \bar{e}$)에 의존하는 경우만을 다루고자 한다. 특히 균형과 가까울 때에는 기술주의적 예측의 비중이, 균형으로부터 멀 때에는 근본주의적 예측의 비중이 높아진다고 보는 De Grauwe, Dewachter & Embrechts¹⁾의 견해를 따르기로 한다. 기술주의적 예측의 비중(Ratio of Technicalists, RT), ω_t 는 다음과 같이 변화한다.

$$\omega_t = \frac{1}{1 + \eta(e_{t-1} - \bar{e})^2}, \eta > 0 \quad (\text{RT})$$

이 수식(RT)에 의하면 근본주의자에 대한 기술주의자의 상대적 비율은 환율의 장기 균형으로부터의 격차와 중도계수 η 가 클수록 감소한다. 즉, 환율의 장기 균형으로부터의 격차($\bar{e} - e_{t-1}$)가 클수록, 그리고 계수 η 에 의해 표현된 근본주의자들의 장기 예측의 정확도가 클수록 근본주의자들의 상대적 비중은 증가하고 기술주의자의 상대적 비율은 감소한다.

1) De Grauwe, P., Dewachter, H. and Embrechts, M.(1993) 참조.

V. 모의실험

모의실험에 이용되는 DM모형은 15개의 외생변수들과 파라메타들, 9개의 내생변수들로 표현된 9개의 수식으로 구성된 연립 차분방정식 체계이다. 그러나 무역수지, T_t , 외국 채권에 대한 수요, F_t^d , 외국 채권에 대한 공급 등 3개의 변수들과 이에 관련된 3개의 수식들은 모의 실험에서 제외한다. 따라서 모형은 $p_t, y_t^s, y_t^d, e_t, {}_t e_{t+1}^e, r_t$ 등 6개의 변수에 대한 6개의 수식으로 이루어진 다음과 같은 미분방정식 체계로 축소된다. 이 축소 모형은 제외된 3개의 변수들과 이에 관련된 3개의 수식들로부터 독립이므로 아무런 문제가 없다.

$$y_t^s = y \quad (\text{GS})$$

$$y_t^d = -\beta_r r_t + \beta_e (e_t - p_t) + b, \quad \beta_r, \beta_e > 0$$

(GD)

$$p_{t+1} = p_t + \beta(y_t^d - y_t^s), \quad \beta > 0$$

(PA)

$$m - p_t = -\alpha_r r_t + \alpha_y y + a, \quad \alpha_r, \alpha_y > 0$$

(ME)

$$r^* + {}_t e_{t+1}^e - e_t = r_t \quad (\text{BD})$$

$${}_t e_{t+1}^e = \theta_p p_t + \theta_e e_t + \theta$$

(EE)

DM모형에 의한 경제 변수들의 시계열이 결정되는 과정을 간단히 정리하면 다음과 같다. 먼저 단기적으로 변수 p_t 가 주어져 있다. 그러면 모형으로부터 ${}_t e_{t+1}^e$ 와 y_t^s, y_t^d, e_t, r_t 등의 5개의 내생변수의 값이 정해지고, 이로부터 다시 p_{t+1} 이 구해진다. 그러면 같은 방법으로 ${}_{t+1} e_{t+2}^e$ 와 $y_{t+1}^s, y_{t+1}^d, e_{t+1}, r_{t+1}$ 등의 값이 다시 정해진다. 이와 같이 계속 반복함으로써 시계열 자료가 계산된다.

1. 외생변수와 파라메타의 초기화

먼저 모형에서 사용한 10개의 외생변수들과 파라메타들을 초기화하면 다음과 같다.

$$y = 1.0, \beta_r = 1.0, \beta_e = 1.0, b = 1.1, \beta = 0.1, m = 1.1, \alpha_r = 10.0, \alpha_y = 1.0, a = 0.1, r^* = 0.1$$

또한 예측에 관련된 계수들을 초기화해야 한다.

$$\gamma_{TE} = 4.0, \gamma_{FE} = 0.1, \eta = 5000.0, \tau = 5, f = 0.02,$$

$$\tau_{MA} = 0.6, \tau_{MM} = 0.3, \tau_{FR} = 0.1, f_{LF} = 0.9, f_{SF} = 0.1$$

이와 같이 외생변수들과 파라메타들이 초기화되면 수식(LR-IR, LR-PL, LR-ER)에 의해 장기균형(Long Run Equilibrium)을 구할 수 있다.

$$\bar{r} = r^* = 0.1, \bar{p} = m + \alpha_r \bar{r} - \alpha_y y - a = 1.0, \bar{e} = \frac{1}{\beta_e} (y + \beta_r \bar{r} - b) + \bar{p} = 1.0$$

2. 완전예견 계수의 계산

완전예견에 의한 기대환율, ${}_t e_{t+1}^e [PF]$ 을 표현하는 수식(SPS)로부터 완전예견 계수를 구한다. 먼저 수식(SPS-1)와 수식(SPS-3)를 연립하여 θ_p 와 θ_e 에 대해 풀 수 있다. 수식(SPS-3)를 θ_p 에 대해 풀어 수식(SPS-1)에 대입하면 θ_e 에 대한 3차 방정식이 되므로 θ_p 와 θ_e 에 대한 해(sol)는 일반적으로 3쌍이 존재한다. 따라서 이들에 대한 부등식(SPS-5)에 있는 B 값도 3개가 존재한다. 이들 중 부등식(SPS-5)를 만족하는 θ_p 와 θ_e 쌍을 완전예견을 만족하는 계수 θ_p 와 θ_e 의 값으로 정한다. 이 θ_p 와 θ_e 의 값들을 수식(SPS-4)에 대입하여 θ 에 대해 푼다.

3. 내생변수의 초기화

내생 변수들의 초기화에 인위적인 요소를 최대한 배제하기 위해 확률적 무작위성(Randomness)을 도입한다. 장기균형으로부터의 편차(Rate of Deviation, dev)는 확률변수로 그 최댓값을, devMax 이내에서 균일분포(Uniform Distribution, UD)를 한다고 가정하자. devMax 의 값을 조정함으로써 확률적 무작위성의 정도를 선택할 수 있는데 여기서는 0.2로 설정한다.

$$\text{devMax} = 0.2 : \text{장기균형으로부터 최대 편차율}$$

내생 변수들의 초기 값들은 다음과 같이 장기균형 근처에서 무작위적으로 정해진다. 즉, 장기균형에 확률변수 $1 + \text{dev}$ 를 곱하여 구한다. 여기서는 각 변수마다 100기의 값들을 초기화한다.

$$p_t = \bar{p}(1 + \text{dev}), y_t^s = y(1 + \text{dev}), y_t^d = y(1 + \text{dev}), e_t = \bar{e}(1 + \text{dev}), {}_t e_{t+1}^e = \bar{e}(1 + \text{dev}),$$

$$r_t = \bar{r}(1 + \text{dev})$$

마지막으로 중도적 예측에서 양(+)의 피드백의 비중 ω_t 는 편의상 0.5로 초기화한다.

$$\omega_t = 0.5$$

4. 시계열의 계산

앞에서와 같이 초기화된 최근 100기, $\{t-100, \dots, t-2, t-1\}$ 의 시계열이 주어지면 t 기의 내생변수, $p_t, y_t^s, y_t^d, e_t, {}_t e_{t+1}^e, r_t$ 등 6개의 변수들에 대한 값을 구할 수 있다. 먼저 다음 물가조정 식(PA)에 의해 t 기의 물가 p_t 가 구해진다. 이와 같이 주어진 물가 하에서 나머지 5개의 내생변수들 $y_t^s, y_t^d, e_t, {}_t e_{t+1}^e, r_t$ 이 다음과 같이 계산된다.

먼저 화폐시장의 균형식(ME)에 의해 t 기의 이자율을 구한다.

$$r_t = \frac{1}{\alpha_r} (p_t - m + \alpha_y y + a) \quad (\text{SR-IR})$$

앞서 계산된 완전예견 계수 θ_p 와 θ_e , t 기의 물가 p_t 를 수식(EE)에 대입하면 단기 근본주의적 예측(Short Run Fundamentalist Expectation, SF)은 미지수 e_t 의 선형함수가 된다.

$${}_t e_{t+1}^e [SF] = \theta_p p_t + \theta_e e_t + \theta$$

다음으로, 초기화된 최근 환율들과 이미 계산된 장기균형 환율을 이용하여 예측 모형에 의한 환율예측을 구할 수 있다. 수식(LR-FE)에 의해 장기 근본주의적 예측(Short Run Fundamentalist Expectation, LF), ${}_t e_{t+1}^e [LF]$ 을 구한다. 또한 수식 (TE-MA), (TE-MM), (TE-FR)에 의해 기술주의자의 이동평균 모형(TE-MA)에 의한 환율예측, ${}_t e_{t+1}^e [MA]$, 운동량 모형(TE-MM)에 의한 6기의 환율예측, ${}_t e_{t+1}^e [MM]$, 필터 모형(TE-FR)에 의한 환율예측, ${}_t e_{t+1}^e [FR]$ 을 각각 계산할 수 있다. 수식(TE)에 의해 이들의 가중평균을 구하면 기술주의자의 예측 ${}_t e_{t+1}^e [TE]$ 가 결정된다.

이렇게 계산된 환율 예측들을 수식(RT)에서 계산되는 기술주의적 예측의 비중 ω_t 를 이용하여 종합하면, 예측환율은 중도적 환율 예측에 관한 수식(MW-EE)에 의해 미지수 e_t 에 대한 선형함수가 된다.

$$\begin{aligned} {}_t e_{t+1}^e &= {}_t e_{t+1}^e [MW] = \omega_t {}_t e_{t+1}^e [TE] + (1 - \omega_t) {}_t e_{t+1}^e [FE] \\ &= \omega_t {}_t e_{t+1}^e [TE] + (1 - \omega_t) (f_{LF} {}_t e_{t+1}^e [LF] + f_{SF} (\theta_p p_t + \theta_e e_t + \theta)) \\ &= C e_t + D, \end{aligned}$$

(MW-EE)

이를 이자율평가(IRP)에 관한 수식(BD)와 연립하여 풀면 e_t 와 $t e_{t+1}^e$ 에 대한 수치 값을 얻는다.

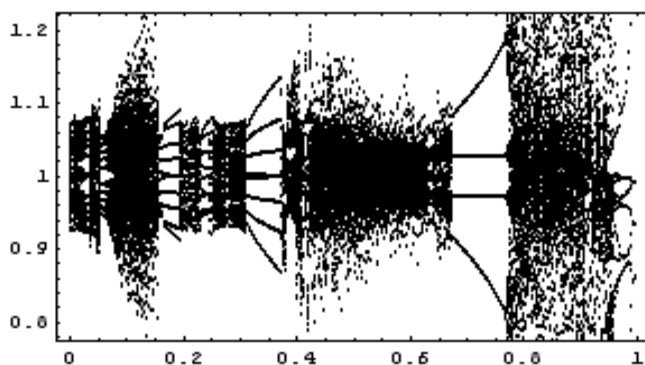
마지막으로 재화에 대한 수요 y_t^d 와 공급 y_t^s 을 수식(GD)와 수식(GS)에 의해 각각 계산할 수 있다.

이렇게 계산한 t기의 내생변수 값들을 DM모형의 가격 조정 식(PA)에 대입하면, 다음 기 t+1기의 재화시장의 가격 p_{t+1} 이 결정된다. 이와 같이 다음기의 재화시장의 가격 p_{t+1} 이 주어지면 위의 전 과정이 반복되어 t+1 기의 내생 변수들, $y_{t+1}^s, y_{t+1}^d, e_{t+1}, {}_{t+1}e_{t+2}^e, r_{t+1}$ 의 값이 정해진다. 이러한 과정이 계속 반복되어 임의의 기간에 해당되는 시계열을 구할 수 있게 된다.

VI. 모의실험의 결과

1. 환율의 카오스적 변화

양(+)의 피드백에 해당되는 근본주의적 예측(FE)중, 장기 근본주의적 예측(LF)과 단기 근본주의적 예측(LF)이 차지하는 비중, f_{LF} , f_{SF} 이 변함에 따라 환율 변화의 패턴이 달라진다. <그림 1>은 이를 보여주는 분기그림(Bifurcation Diagram)으로 수평축은 f_{SF} , 수직축은 환율 e_t 를 나타낸다¹⁾. f_{SF} 가 작은 경우에 카오스가 나타나고, f_{SF} 가 증가함에 따라 단기순환과 장기순환이 반복되다가 f_{SF} 가 중간정도에서 또 다른 유형의 카오스가 나타난다. 전자를 유형I의 카



<그림 1> LF-SF 분기

오스(ChI), 후자를 유형II의 카오스(ChII)라고 하자. f_{SF} 이 계속 증가하면 단기순환을 거친 후 발산하게 된다. 이는 단기균형으로의 복귀에 기반을 둔 SF의 비중이 커지고 장기균형으로의 복귀에 기반을 둔 LF의 비중이 작아져서 전반적으로 음(-)의 피드백의 힘이 약하기 때문이다.

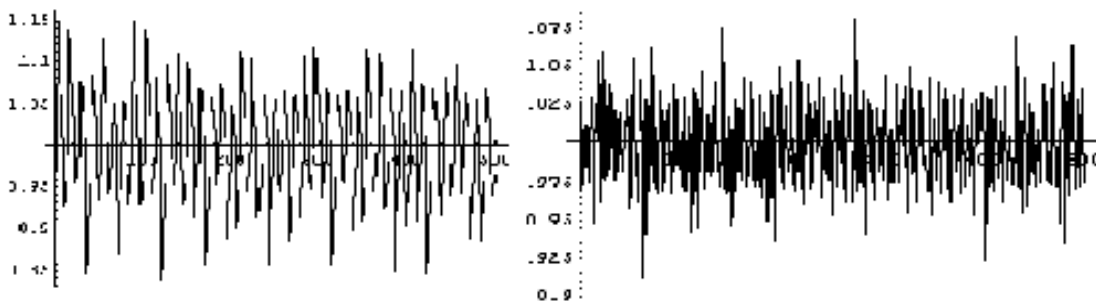
1) 각각의 비중에 대해 1000기의 시계열을 도출한 후 마지막 100기의 환율들을 그림에 표시하였다.

여기서는 유형I의 카오스(ChI)에 해당되는 $f_{SF}=0.1$ 인 경우와 유형II의 카오스(ChII)에 해당되는 $f_{SF}=0.6$ 인 경우를 중심으로 논의를 전개한다. <그림 2>는 이들 각각의 경우에 대한 1000기 동안의 환율을 나타내고 있다. 모두 전형적인 카오스적 변화의 모습을 보이고 있다. 왼쪽 그림은 유형I의 경우이고 오른쪽 그림은 유형II의 경우에 해당된다. 후자의 경우가 전자보다 더욱 카오스적 변화를 겪는 것처럼 보인다.

이들 카오스적 변화를 분석하기 위해 일반적으로 더 높은 차원의 공간에 매립(Embedding)하는 방법을 사용하고 있다. 이를 위해 환율에 대한 시계열 대신에 그 차, $e_t - e_{t-1}$ 즉, 증가율로 변환시킨 시계열을 이용한다. 매립차원을 변화시키면서 상관분석을 해본 결과 5차원 공간이 적절한 것으로 나타났다. 5차원 공간에 매립하여 구해본 5개의 리아푸노프 지수(Liapunov Exponent, LE)들과 이들의 합은 유형I의 카오스(ChI)와 유형II의 카오스(ChII)의 경우에 각각 다음과 같다.

ChI: {0.13908, -0.040998, -0.18429, -0.31471, -0.71081}; 합 = -1.1117

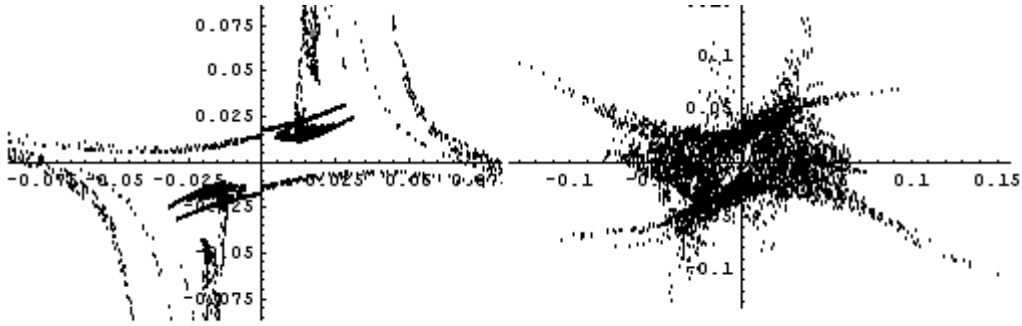
ChII: {0.19214, 0.05004, -0.08859, -0.23254, -0.72255}; 합 = -0.8014



<그림 2> 환율 변화

두 경우 모두 리아푸노프 지수의 합이 음수이고 가장 큰 리아푸노프 지수(Largest Liapunov Exponent, LLE)가 양이므로 이상한 끌개(Strange Attractor, SA)가 존재한다. LLE는 카오스의 가장 큰 특징인 초기조건에 대한 민감성, 즉 나비효과(Butterfly Effect)의 정도를 나타내는 지수이다. 이 LLE가 ChI보다 ChII의 경우가 더 크므로 유형II가 더 카오스적이라고 할 수 있다.

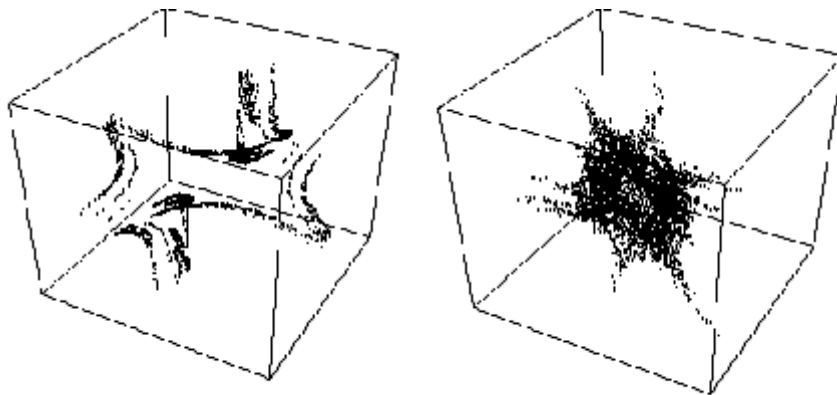
<그림 3>은 두 유형의 이상한 끌개(SA)를 2차원 공간에, <그림 4>는 3차원 공간에 매립한 것이다. 앞서서도 밝혔듯이 SA를 왜곡함이 없이 매립하기 위해서는 최소한 5차원 공간이 필요하다. 5차원 매립 하에서 이상한 끌개의 상관차원(Correlation Dimension, CD)을 구하면 다음과 같다.



<그림 3> 2차원 매립

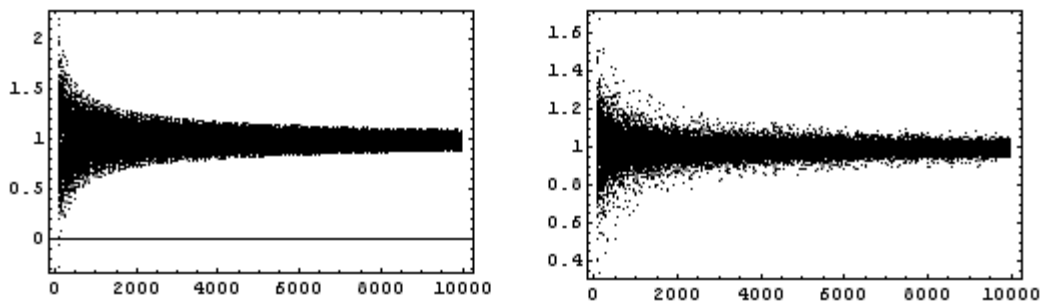
ChI : 1.25021; ChII : 2.35132

상관차원은 시계열 자료에 대한 프랙탈 차원(Fractal Dimension,FD)을 대표하는데 사용되는 전형적인 방법을 제공한다. 이 값들이 두 경우에 모두 정수가 아닌 소수이므로 카오스의 특징을 나타낸다.



<그림 4> 3차원 매립

이제 예측과 관련된 계수들이 변화할 때 환율변동 패턴이 어떻게 변하는지에 관한 분기(Bifurcation) 분석을 한다. 기술주의들의 근본주의자들에 대한 상대적 비중이 높은 $f_{SF}=0.1$ 인 경우(CaseI)와 상대적 비중이 낮은 $f_{SF}=0.6$ 인 경우(CaseII)로 나누어 전자의 경우는 좌측 그림, 후자의 경우는 우측 그림에 나타내기로 한다.



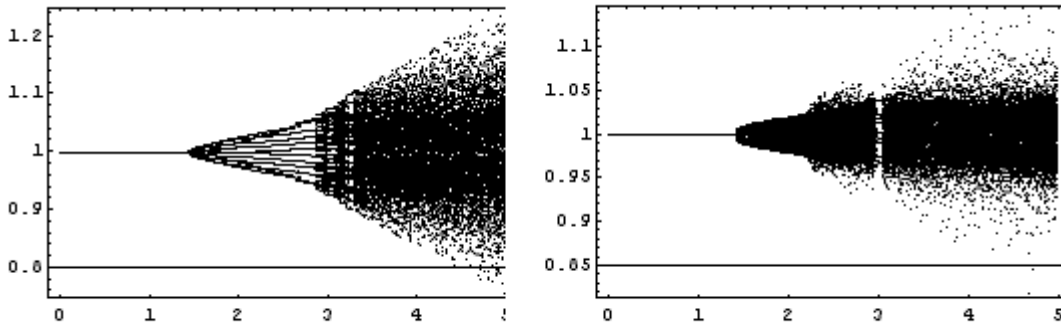
<그림 5> 중도계수 분기

2. 중도계수 분기

중도계수 η 에 의해 표현된 근본주의자들의 장기 예측의 정확도가 클수록 환율이 균형을 벗어날 때 근본주의자들의 음의 피드백 역할은 빨리 증가한다. 따라서 <그림 5>에서 보는 바와 같이 두 경우 모두 중도계수 η 가 증가할수록 환율의 카오스적 변화의 변동 폭은 감소한다.

3. 양의 피드백 분기

예측조정계수 γ_{TE} 는 기술주의자가 환율 예상에 과거 환율에 대한 정보를 반영하는 정도를 나타낸다. γ_{TE} 가 클수록 더욱 민감하게 반응하게 되어 양의 피드백이 강해진다. <그림 6>에서 보는 바와 같이 두 경우 모두 γ_{TE} 가 작을 때는 음의 피드백이 상대적으로 강하여 장기균형으로 수렴하고, γ_{TE} 가 클 때는 카오스적 환율변동이 심해진다. 그러나 첫 번째 경우(CaseI)에는 단기 순환을 거쳐 서서히 카오스(ChI)으로 가는 반면에 두 번째 경우(CaseII)에는 장기 순환을 거쳐 바로 카오스(ChII)로 전환한다.

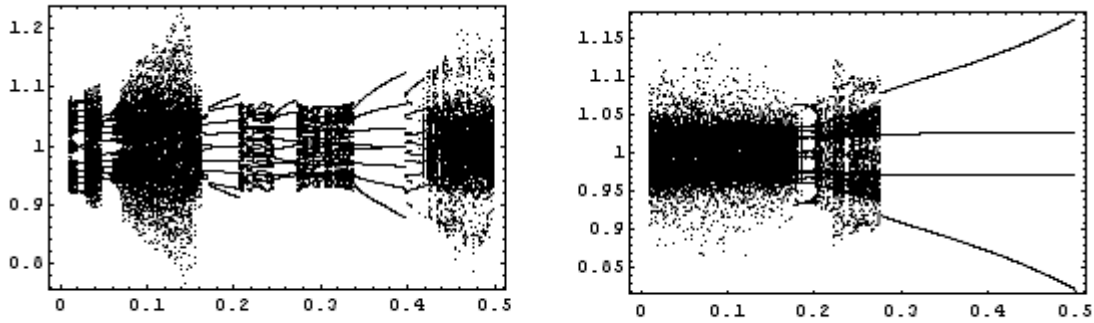


<그림 6> 양의 피드백 분기

4. 음의 피드백 분기

예측조정계수 γ_{FE} 는 장기 근본주의자가 환율 예상에 장기 균형 환율과의 격차를 반영하는 정도를 나타낸다. γ_{FE} 가 클수록 예측이 균형 환율과의 격차에 대해 더욱 민감하게 반응하게 되어 음의 피드백이 강해진다. <그림 7>에서 보는 바와 같이 γ_{FE} 가 비교적 작을 때는 두 경우 모두 카오스가 존재한다.

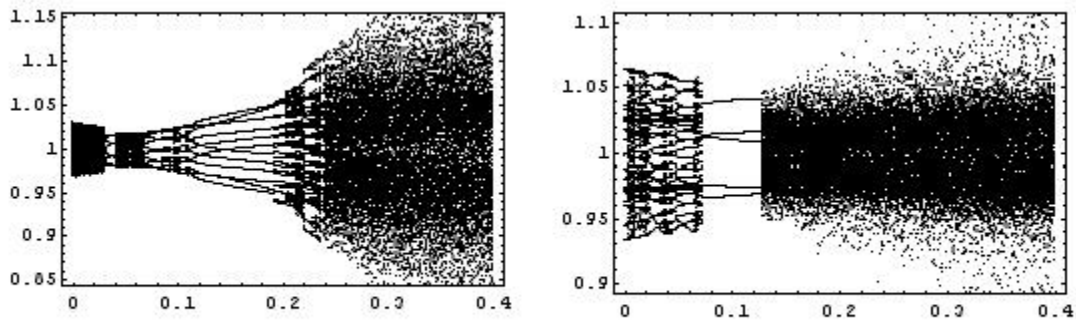
그러나 γ_{FE} 가 증가하면서 첫 번째 경우(CaseI)에는 0.1 부근에서의 유형I 카오스에서 단기, 장기 순환을 거쳐 0.4를 지나면서 유형II 카오스로 전환하는 반면, 두 번째 경우(CaseII)에는 상당 기간 유형II 카오스가 유지되다가 단기 순환으로 전환되어 그 후 지속된다.



<그림 7> 음의 피드백 분기

5. MA-MM 분기

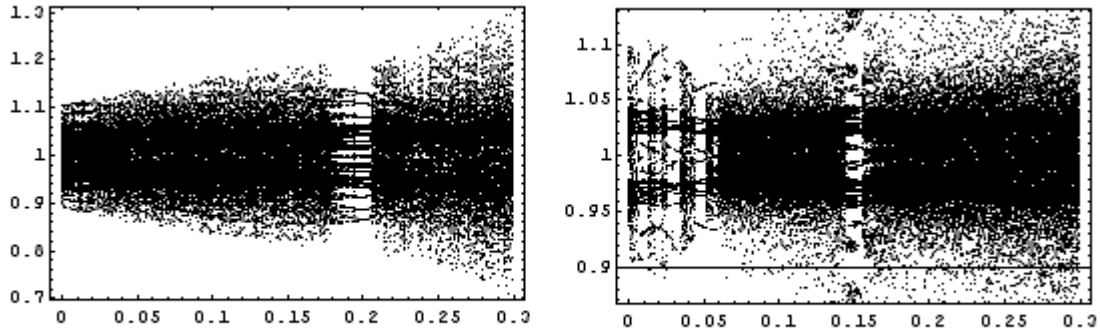
τ_{FR} 은 0.1로 주어지고 나머지 비중 0.9중 τ_{MM} 이 커짐에 따라, 즉, τ_{MA} 가 감소함에 따라 <그림 8>에서 보는 바와 같이 장, 단기 순환을 거쳐 카오스가 나타난다. 첫 번째 경우(CaseI)에는 단기 순환을 거쳐 0.2를 지나 서서히 카오스(ChI)으로 가는 반면, 두 번째 경우(CaseII)에는 장기 순환으로부터 단기 순환을 거쳐 0.1을 지나 바로 카오스(ChII)로 전환한다.



<그림 8> MA-MM 분기

6. MA-FR 분기

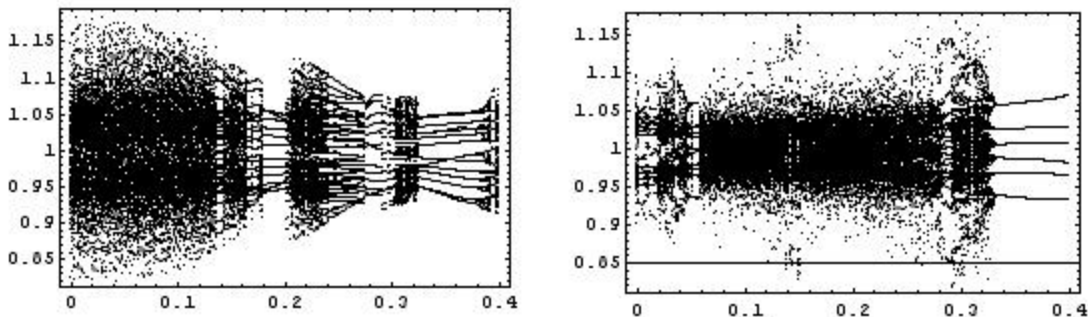
τ_{MM} 은 0.3로 주어지고 나머지 비중 0.7중 τ_{FR} 이 커짐에 따라, 즉, τ_{MA} 가 감소함에 따라 <그림 9>에서 보는 바와 같이 환율 변화의 카오스적 변동성이 커진다. 첫 번째 경우(CaseI)에는 대부분 유형I 카오스(ChI)인 반면, 두 번째 경우(CaseII)에는 τ_{FR} 이 작은 영역에서 장기 순환과 단기 순환이 번갈아 일어나다가 유형II 카오스(ChII)로 전환한다.



<그림 9> MA-FR 분기

7. MM-FR 분기

τ_{MA} 은 0.6으로 주어지고 나머지 비중 0.4 중 τ_{FR} 이 커짐에 따라, 즉, τ_{MM} 가 감소함에 따라 <그림 10>에서 보는 바와 같이 카오스에서 장, 단기 순환을 번갈아 거치면서 단기 순환으로 전환한다. 첫 번째 경우(CaseI)에는 비교적 작은 영역에서 유형I 카오스(ChI)에 머물다가 넓은 영역에서 장, 단기 순환을 번갈아 거치면서 서서히 단기 순환으로 가는 반면, 두 번째 경우(CaseII)에는 비교적 넓은 영역에서 유형II 카오스(ChII)에 머물다가 바로 단기 순환으로 전환한다.



<그림 10> MM-FR 분기

VII. 결론

본 연구에서는 이산 시간적 차분방정식으로 전환한 Dornbusch의 통화론적 모형에 다양한 예측 모형을 접목하여 예측 방법에 따라 환율의 동태적 변화 패턴이 어떻게 달라지는지 모의 실험을 통하여 분석해 보았다. 예측 모형으로는 이동평균(MA)모형, 운동량(MM)모형, 필터(FR)모형 등 과거 환율 시계열에 대한 정보를 이용하는 기술주의적 예측 방법과 단기균형 환율과 장기균형 환율 등 환율 모형에 관한 정보를 이용하는 근본주의적 예측 방법을 도입하여 이들 간의 중도적 상호 작용이 카오스의 출현에 어떤 영향을 미치는지 알아보았다.

근본주의적 예측에 해당하는 음(-)의 피드백이 상대적으로 강하면 장기균형으로 수렴하고, 기술주의적 예측에 해당하는 양(+)의 피드백이 상대적으로 강하면 장기균형으로부터 발산한

다. 이 두 가지의 힘이 중도적으로 상호작용을 할 때 카오스들이 나타나며 이러한 카오스들 사이에 단기 순환과 장기 순환이 간헐적으로 나타난다. 또한 기술주의적 예측에서 차지하는 이동평균(MA)모형, 운동량(MM)모형, 필터(FR)모형의 비중과 근본주의적 예측에서 차지하는 장, 단기 근본주의의 비중이 달라짐에 따라 다양한 형태의 분기(Bifurcation)가 발생한다.

본 연구는 다음과 같은 방향으로 확대 발전시킬 필요가 있다.

첫째, 모의실험에서 나타나는 극한순환에서 카오스로 분기하는 여러 가지 경로에 대한 수학적 이론적 분석이 필요하다.

둘째, 자본의 국가 간 대체성과 이동성 불완전한 경우를 포함하는 모형으로 확대하여 예측과 자본자유화의 정도 간의 상호작용이 환율 변동에 어떻게 영향을 미치는지 연구할 필요성이 있다.

셋째, 환율예측 모형들이 이미 존재한다고 가정한 본연구와는 달리 이들이 진화를 통해 어떻게 창발(Emergence)되는지에 대한 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm)을 이용한 연구가 요구된다.

참고문헌

- 박승준(1998), 「자본의 이동성 및 대체성과 환율 변화에 관한 동태적 연구」, 『국제경제연구』 4(3), 169-188.
- 박승준, 구광민(2003), 「Capital Liberalization and Chaos in the Foreign Exchange Rate Market」, 한국국제경제학회 동계학술대회.
- Arthur, W. B. et al.(1996), "Asset Pricing Under Endogenous Expectations in an Artificial Stock Market," *Santa Fe Institute Paper* 96-12-093, pp. 27.
- Bauer, C. and Herz, B.(2003), "Technical Trading and the Volatility of Exchange Rates," *WoPEc working paper*.
- Bask, M.(2003), "Chartist and Fundamentalists in the Currency Market and the Volatility of Exchange Rates," *WoPEc working paper*.
- Bhandari, J.S., Driskill, R. and Frenkel, J.A.(1984), "Capital Mobility and Exchange Rate Overshooting," *European Economic Review* 24, 309-320.
- De Grauwe, P., Dewachter, H. and Embrechts, M.(1993), *Exchange Rate Theory: Chaotic Models of Foreign Exchange Market*, Blackwell.
- Dornbusch, R.(1976), "Expectation and Exchange Rate Dynamics," *Journal of Political Economy* 84, Dec., 1161-1176.
- Frankel, J.A. and Rose, A.K.(1995), "An Empirical Characterization of Nominal Exchange Rate," in G. Grossman and K. Rogoff, eds., *The Handbook of International Economics*, Vol. III, Amsterdam: North-Holland, 1689-1729.
- Frenkel, M.(1997), "Exchange Rate Dynamics with Chartist, Fundamentalist, and Rational Speculators in the Foreign Exchange Market," *International Journal of Business* 2(1), 1-24.
- Jeanne, O. and Ross, A.K.(2002), "Noising Trade and Exchange Rate Regimes," *Quarterly Journal of Economics* 117(2), 537-569.
- Meese, R. and Rogoff, K.(1983), "Empirical Exchange Rate Models of the Seventies: Do They

Fit Out of Sample?," *Journal of International Economics* 14, 3-24.

Ott, E., Sauer, T. and Yorke, J.A.(1994), *Coping With Chaos: Analysis of Chaotic Data and Exploitation of Chaotic Systems*, John Wiley & Sons, Inc.

Taylor, M.P. and Allen, H.(1992), "The Use of Technical Analysis in the Foreign Exchange Market," *Journal of International Money and Finance* 11, 304-314.

Taylor, M.P. and Killan, L.(2003), "Why is it so difficult to Beat the Random Walk Forecast of Exchange Rates?," *Journal of International Economics* 60(1), 85-107.

Vigfusson, R.(1997), "Switching Between Chartists and Fundamentalists: A Markov Regime-Switching Approach," *International Journal of Financial Economics* 2, 291-305.

부록: Mathematica Program

```
DMFn[MA_,MM_,FM_,LF_,SF_,n_,b_,gamTE_,gamFE_,eta_,data_,seedRand_] :=
Module[{p,ys,yd,e,ee,r,w,sol,B,thp,the,thStable,pNext,
        SMA,LMA,eeMA,eeMM,eeFM,eeTE,eeFE,eeMW,eeLF,eeSF,eMax,eMin,
        y,br,be,b0, ar, ay, a0,fr,tauSMA,tauLMA,tauMM,tauFM,f,w1,w2,w3,
        eT,wTemp,rTemp,ysTemp, ydTemp,simulation},
Off[General::spell1];
y=1.0; br=1.0; be=1.0; b0=1.1; m=1.1; ar=10.0; ay=1.0; a0=0.1; fr=0.1;
tauSMA=1; tauLMA=2; tauMM=5;tauFM=10; f=0.02;
w1=1/ar; w2=b*be; w3=b*br/ar;
rbar=fr; pbar=m+ ar*rbar-ay*y-a0; ebar=(1/be)*(y+ br*rbar-b0)+ pbar;
Cp=(w2+ w3)*pbar-w2*ebar; Ce=-w1*pbar;
devMax=0.2;dev:=devMax*(2Random[]-1);SeedRandom[seedRand];
p=Table[pbar*(1+ dev),{100}];
ys=Table[y*(1+ dev),{100}];
yd=Table[y*(1+ dev), {100}];
e=Table[ebar*(1+ dev),{100}];
ee=Table[ebar*(1+ dev),{100}];
r=Table[rbar*(1+ dev),{100}];
w=Table[0.5, {100}];
ClearAll[thp,the];
sol=Solve[{(1-the)*thp==(thp-w1)*(1-w2-w3),(1-the)*the==(thp-w1)*w2},{the,thp}];
B=(1-w2-w3)+ (w2/(1-the))*(thp-w1)/.sol;
thStable=If[Abs[B[[1]]]<1,1,If[Abs[B[[2]]]<1,2,3]];
{thp,the}={thp,the}/.sol[[thStable]];
ClearAll[th];
{th}=th/.Solve[th==(1/(1-the))*((thp-w1)*Cp+ th-Ce),{th}];
simulation=Table[
pNext=p[[t-1]]+ b*(yd[[t-1]]-ys[[t-1]]); AppendTo[p,pNext];
SMA=(1/tauSMA)*(e[[t-1]]-e[[t-1-tauSMA]]);
LMA=(1/tauLMA)*(e[[t-1]]-e[[t-1-tauLMA]]);
eeMA=SMA-LMA;
eeMM=(e[[t-1]]-e[[t-1-tauMM]])-(e[[t-2]]-e[[t-2-tauMM]]);
eMax=Max[Table[e[[i]],{i,t-1-tauFM,t-2}]];
eMin=Min[Table[e[[i]],{i,t-1-tauFM,t-2}]];
eeFM=If[e[[t-1]]>e[[t-2]]&&
e[[t-1]]>eMin*(1+f),e[[t-1]]-eMin*(1+f),If[e[[t-1]]<e[[t-2]]&&e[[t-1]]<eMax*(1-f),e[[t-1]]-eMax*(1-f),0]];
eeLF=e[[t-1]]+ gamFE*(ebar-e[[t-1]]);
eeSF=thp*p[[t]]+ the*eT+ th;
wTemp=1/(1+ eta*(e[[t-1]]-ebar)^2);AppendTo[w,wTemp];
eeTE=e[[t-1]]+ gamTE*(MA*eeMA+ MM*eeMM+ FM*eeFM);
eeFE=LF*eeLF+ SF*eeSF;
eeMW=w[[t]]*eeTE+ (1-w[[t]])*eeFE;
rTemp=(1/ar)*(p[[t]]-m+ ay*y+ a0);AppendTo[r,rTemp];
ClearAll[eT];{eT}=eT/.Solve[fr+ eeMW-eT*r[[t]],eT];AppendTo[e,eT];
AppendTo[ee,eeMW];
ysTemp=y;AppendTo[ys,ysTemp]; ydTemp=-br*r[[t]]+ be*(e[[t]]-p[[t]])+ b0;AppendTo[yd,ydTemp];
{t,Last[p],Last[ee],Last[e],Last[r],Last[yd],Last[w]},t,101,n];
tr=Transpose[simulation];
If[data!=0,tr[[data]],tr]
]
```

<Abstract>

A Simulation Study on Expectation and Chaos in the Exchange Rate Movements

Seung Jun Park

In this study we transform the Dornbusch Model into discrete time difference equations system. We introduce various types of expectation models for the exchange rate movements and see how the choice of expectation models changes the dynamic patterns of the exchange rate fluctuations. As expectation models we consider technicalist expectations and fundamentalist expectations.

Technicalist expectations use the information for past exchange rate data to form the forecast. There are moving average models, momentum models and filter rule models according to the kind of information they use. Technicalist expectations bring the positive(+) feedback into the exchange rate movements by pushing the exchange rate away from the equilibrium. Fundamentalist expectations use the information for the equilibrium exchange rates to form the forecast. There are short run fundamentalist models and long run fundamentalist models according to whether they use short run or long run equilibrium. Fundamentalist expectations bring the negative(-) feedback into the exchange rate movements by regressing the exchange rate toward the equilibrium.

When the negative(-) feedback given by fundamentalist expectations is relatively stronger than the positive(+) feedback given by technicalist expectations, the exchange rate converges to the long run equilibrium, while it diverges to infinity in the opposite case. However, when the two opposite feedbacks interact in the middle way, chaotic exchange rate movements and intermittent short run and long run limit cycles emerge. And different compositions of technicalist expectations among the moving average model, the momentum model and the filter rule model and different compositions of fundamentalist expectations among short run and long run fundamentalist models bring different kinds of various exotic bifurcations.

Key Words: Positive Feedback, Negative Feedback, Middle Way Expectation, Chaos, Limit Cycle, Bifurcation, Liapunov Exponent, Correlation(Fractal) Dimension.