유효기간 상품의 최적 주문량과 수익률 모형

An Optimal Order Quantity and Profit Ratio Model
for an Item with the Valid Time

윤 승 철*
고 동 수**

I. 서 론

판매지점에서 취급하는 많은 상품들 중 판매 유효기간이 붙어 있는 상품(유효기간 상품)들은 특정시간, 혹은 특정날짜를 넘기게 되는 경우 판매가 어렵게 된다. 청량음료, 혹은 캔디 등과 같은 제품들은 유효기간이 명시되어 있더라도 그 기간이 일반적으로 길기 때문에 특별한 관리를 요하지 않는다. 그러나 우유, 요구르트 등의 낙농제품, 과일, 채소, 식빵, 생선 등은 단기간 내에 판매해야 하며, 계절 혹은 명절을 위한 제품들 역시 해당 기간 내에 판매하지 못하는 경우 큰 손실이 발생하게 된다. 유효기간 이내에 판매하지 못하는 경우 이들 제품들은 할인판매 등을 통해 가격을 낮추어 판매하게 되며, 어떤 경우에는 하위단계의 소매점으로 계약에 따라 낮은 가격으로 공급하기도 한다.

본 논문의 목적은 유효기간 상품을 관리하기 위한 최적 주문량(또는 최적 구매량)의 결정과 이에 따른 수익률, 그리고 적정 할인가 등을 분석하는 것이다. 그리고 분석을 위한 상황으로 첫째, 유효기간 동안의 실제 수요량은 알려져 있지 않으며, 측정값, 즉 유효기간 동안의 평균수요량과 표준편차를 사용한다. 둘째, 유효기간 이내에 판매되는 경우 제품들은 정상가격으로 판매되며, 유효기간이 지나게 되면 정상적인 가격보다 상대적으로 낮은 가격으로 판매되는 경우를 고려하여 할인된 판매가격을 사용한다. 또한 재고부족이 발생하는 경우에 신용상실을 고려하여 신용상실을 금액으로 환산한 신용상실비용을 사용한다. 이러한 상황들을 전제로 한 모형수립과 분석을 실행한다.

* 단국대학교 상경대학 경영학전공 교수
** 단국대학교 대학원 석사과정

II. 유효기간 상품의 최적주문량 결정

유효기간이 명시되어 있는 제품의 한 주문주기에서 실제 수요량이 재고량보다 작거나 같은 경우, 실제 수요량은 모두 유효기간 동안의 판매가격으로 판매되며, 이 기간에 판매되지 않고 남은 재고량은 할인된 판매가격으로 판매된다. 그리고 유효기간 동안의 실제 수요량이 재고량 보다 큰 경우, 재고량은 모두 유효기간 동안의 판매가격으로 판매되며, 부족량에 대한 손실, 즉 부족량에 따른 신용상실 비용이 발생한다. 따라서 한 유효기간 동안 실현되는 이익은 수요량의 변화에 따라 바뀌게 된다. 본 연구에서는 유효기간 동안의 실제 수요량의 변화는 정규분포를 따르는 것으로 가정하여 분석한다. 이러한 상황하에서 기대이익은 다음과 같이 계산된다.

유효기간 동안의 수요량의 기대값과 표준편차를 μ와 σ, 그리고 단위당 구입비용을 C라 하자. 또한 유효기간 동안의 단위당 판매가를 P_1, 유효기간 이후의 단위당 판매가 (할인가) 또는 폐기비용을 P_2, 단위당 신용상실비용을 P_3라 하자. 그리고 유효기간이 명시되어 있는 제품의 한 주문주기에서 초기 재고량(주문량의 크기와 같음)을 Q, 유효기간 동안의 실제 수요량을 x라 하면, x가 재고량 Q보다 작거나 같은 경우, 이 x개는 모두 단위당 P_1의 판매가격으로 판매된다. 또한 이 기간에 판매되지 않은 $(Q-x)$개는 할인된 P_2의 판매가격으로 판매된다. 그리고 유효기간 동안 실제 수요량 x가 재고량 Q보다 큰 경우, 재고량 Q개는 단위당 판매가격 P_1으로 판매되며, 부족량 $(x-Q)$개는 단위당 P_3만큼의 손실을 가져오게 된다. 또한 유효기간 동안 총 구입비용은 $C \cdot Q$원이 된다. 따라서 기대이익 $E(P)$는

$$\begin{aligned} E(P) \;&= P_1 \int_{x \le Q} x \cdot f(x)dx \\ &+ P_2 \int_{x \le Q} (Q-x) \cdot f(x)dx \\ &+ P_1 \int_{x > Q} Q \cdot f(x)dx \\ &- P_3 \int_{x > Q} (x-Q) \cdot f(x)dx - C \cdot Q \end{aligned} \qquad \text{<식 II - 1>}$$

의 관계를 갖게 된다. 이 식에서 $f(x)$는 정규분포 확률밀도함수이다. 위의 관계식으로부터 $E(P)$가 최대가 되는 유효기간동안의 재고량, 즉 유효기간을 충당하게 되는 최적주문량이 결정되며, 이를 위해 <식 II-1> 의 Q에 대한 1, 2차 도함수를 분석한다. 그 과정은 다음과 같다.

<식 II-1>의 첫째 항을 전개하면, 유효기간동안의 수요량 x와 표준정규분포 확률변수 z와의 관계에서

$$z = (x - \mu)/\sigma \;\Rightarrow\; x = \mu + z \cdot \sigma$$
$$dx/dz = d(\mu + z \cdot \sigma)/dz = \sigma$$
$$dx = \sigma \cdot dz$$

임으로

$$
\begin{aligned}
P_1 \int_{-\infty}^{Q} x \cdot f(x)dx &= P_1 \int_{-\infty}^{(Q-\mu)/\sigma} (\mu + z \cdot \sigma) \cdot f(z)dz \\
&= P_1 [\ \mu \cdot \int_{-\infty}^{(Q-\mu)/\sigma} f(z)dz + \sigma \cdot \int_{-\infty}^{(Q-\mu)/\sigma} z \cdot f(z)dz\ ] \\
&= P_1 [\ \mu \cdot F(k) - \sigma \cdot f(k)\ ]
\end{aligned}
$$

이며, 위의 식에서 $k = (Q-\mu)/\sigma$, 그리고 $F(k) = \int_{-\infty}^{(Q-\mu)/\sigma} f(z)dz$ 이다.

계속해서 둘째 항을 전개하면,

$$
\begin{aligned}
P_2 \int_{x \le Q} (Q - x) \cdot f(x)dx &= P_2 [\ Q \cdot \int_{-\infty}^{Q} f(x)dx - \int_{-\infty}^{Q} x \cdot f(x)dx] \\
&= P_2 [\ Q \cdot F(k) - \mu \cdot F(k) + \sigma \cdot f(k)\ ]
\end{aligned}
$$

이며, 셋째 항은

$$
\begin{aligned}
P_1 \int_{x > Q} Q \cdot f(x)dx &= P_1 \cdot Q \cdot \int_{Q}^{\infty} f(x)dx \\
&= P_1 \cdot Q \cdot (1 - F(k))
\end{aligned}
$$

이고, 넷째 항은

$$
\begin{aligned}
P_3 \int_{x > Q} (x - Q) \cdot f(x)dx &= P_3 [\int_{Q}^{\infty} x \cdot f(x)dx - Q \cdot \int_{Q}^{\infty} f(x)dx] \\
&= P_3 [\ \mu(1 - F(k)) + \sigma \cdot f(k) - Q \cdot (1 - F(k))]
\end{aligned}
$$

이다. 따라서 <식 II - 1>은

$$
\begin{aligned}
E(P) = {} & F(k) \cdot [P_1 \cdot \mu + P_2 \cdot Q - P_2 \cdot \mu - P_1 \cdot Q + P_3 \cdot \mu - P_3 \cdot Q] \\
& - P_1 \cdot \sigma \cdot f(k) + P_2 \cdot \sigma \cdot f(k) + P_1 \cdot Q - P_3 \cdot \mu
\end{aligned}
$$

$$- P_3 \cdot \sigma \cdot f(k) + P_3 Q - C \cdot Q$$ <식 II - 2>

의 관계를 갖는다. 그리고 유효기간 동안의 최적 주문량 Q^*는 Q에 대한 1차 도함수를 0으로 놓음으로써 얻어진다. 즉,

$$dE(P)/dQ = F(k)[P_2 - P_1 - P_3] + P_1 + P_3 - C = 0$$

의 관계에서,

$$F(k^*) = (P_1 + P_3 - C)/(P_1 + P_3 - P_2)$$ <식 II - 3>

의 관계를 갖게 된다. 이 분석의 기본이 되는 단일기간 주문량분석은 참고문헌 [3], [4], [5]에서 설명하고 있으며, 확률밀도함수와 관련된 계산은 참고문헌 [1], [2]를 참고한다.

따라서 최적 주문량 Q^*는 <식 3-3>의 $F(k^*)$ 계산값과 이에 대응하는 특정한 k^*값을 이용하여 $Q^* = \mu + k^* \cdot \sigma$의 관계로 부터 구해진다. 또한 $E(P)$가 최대가 되기 위한 조건

$$dE(P)/d^2Q = f(k)[P_2 - P_1 - P_3] \le 0$$

로부터

$$P_2 \le P_1 + P_3$$ <식 II - 4>

인 범위에서 Q^*가 결정된다.

(예 II-1)

수요량과 구입비용, 그리고 판매가격들의 정보가 다음과 같이

μ = 1,000(개), σ = 300(개), C = 1,000(원),
P_1= 1,800(원), P_2= 800(원), P_3 = 1,000(원)

인 경우, 유효기간의 고객수요를 충당하기 위한 적정주문량 Q^*는 다음과 같이 계산된다. <식 II - 3>으로 부터

$$F(k) = (P_1+P_3-C)/(P_1+P_3-P_2) = 0.9$$

이며, <식 II - 4>의 조건을 만족한다. 그리고 $F(z^*) = 0.9$인 z^*값은 1.285이다. 따라서 최적주문량 Q^*는

$$Q^* = \mu + k^* \cdot \sigma = 1385.5$$

개이다.

III. 기대이익과 수익률 분석

II장의 분석을 통해 결정된 최대주문량 Q^*에 대응하는 유효기간 상품의 한 주문주기당 기대이익은 <식 II - 2>에 Q^*를 대입함으로써 얻어진다.

예를 들면 제 1 절의 (계산 예)에서 적정주문량 Q^*= 1385.5에 대응하는 기대이익은 <식 II - 2>에 의해

$$E(P) = 1{,}922{,}300(\text{원})$$

이다. 그리고 제품 한 단위당 수익률을 u라 하면 u는 기대이익 $E(P)$를 총 구입비용 $Q \cdot C$ 로 나눈 값과 같게 된다. 즉,

$$u = E(P)/(Q \cdot C) \qquad \text{<식 III - 1>}$$

이며, 위의 (예 II - 1)에서의 u값은

$$u = 1{,}922{,}300 \ / \ 1385.5(1000) = 1.39$$

이다. 이 단위당 수익률 u값을 이용함으로써 유효기간 상품의 총이익과 적정주문량의 관계를 편리하게 추적해 나아갈 수 있다.

참고로 신용상실 비용을 금액으로 정확히 환산하기 어려운 경우, 금전적인 또는 금액으로 실현된 기대이익을 계산해 볼 수 있다. 이 경우의 기대이익을 $E(MP)$라 하면 $E(MP)$는 <식 II - 1>에서 넷째 항이 제외되며,

$$E(MP) = P_1 \int_{x \le Q} x \cdot f(x)dx + P_2 \int_{x \le Q} (Q-x) \cdot f(x)dx + P_1 \int_{x > Q} Q \cdot f(x)dx - C \cdot Q$$

<식 III - 2>

와 같게 된다. 따라서 이 $E(MP)$의 값은 $E(P)$값보다 큰 값이 된다. 또한 $E(MP)$에 대응하는 최적주문량의 계산방법은 <식 II - 1>, <식 II - 2>, 그리고 <식 II - 3>의 과정과 같다. 이 과정을 통해 계산된 $F(k^*)$는

$$F(k^*) = (C - P_1)/(P_2 - P_1) \qquad \text{<식 III - 3>}$$

이며, $P_1 > P_2$의 조건에서 성립된다. 이 k^*에 대응되는 값을 이용하여 최적주문량 Q^*는 $Q^* = \mu + k^* \cdot \sigma$ 로부터 계산된다. 그리고 단위당 총이익 $E(MP)$는 <식 III - 2>에 Q^*를 대입함으로써 구해진다. 그리고 같은 방법으로 단위당 수익률 u_m은

$$u_m = E(MP)/(Q^* \cdot C)$$

에서 찾아진다.

<표 III - 1>과 <표 III - 2>는 각 자료값들의 변화에 따른 적정주문량과 이에 대응하는 단위당 수익률들을 계산한 결과들이다. 표에서 cv, r_1, r_2, r_3는 각각

$$cv = \sigma/\mu, \quad r_1 = P_1/C, \quad r_2 = P_2/C, \quad r_3 = P_3/C$$

의 값들이며, 최적주문량의 비율 q와 단위당 수익률 u는

$$q = Q^*/\mu$$
$$u = E(P)/(Q^* \cdot C)$$

로서, q는 유효기간의 평균수요량 μ에 대한 비율을 의미하며, u는 각 q에 대응하는 단위당 수익률을 나타낸다. 이렇게 작성된 표는 많은 자료들의 변화에 따른 결과들을 효과적으로 분석하는 데에 도움을 준다. 다음의 예들을 표를 이용하여 계산해 보자.

(예 III - 1)

한 제품의 유효기간이 10일이며 이 기간동안의 평균수요량은 100개, 표준편차는 30개라고 가정한다. 또한 단위당 구입비용은 10,000원 이며, 판매가격은 18,000원, 유효기간 후의 판매가격은 유효기간 판매가격의 60%이다. 그리고 신용상실비용은 유효기간 판매가격의 30%를

가정한다. 이 예의 경우 cv, r_1, r_2, r_3는 각각

cv = 30/100 = 0.3, r_1 = 18,000/10,000 = 1.8, r_2 = 0.6, r_3 = 0.3

이며, <표 III -1> 에서 q = 1.19, u = 0.55 이므로, 최적주문량 Q^*와 기대이익 $E(P)$는

$Q^* = \mu \cdot q = 100(1.19) = 119$(개)
$E(P) = u \cdot (Q^* \cdot C) = (0.55)(119)(10,000) = 654,500$(원)

이다. 그리고 단위당 순이익은

$u \cdot C = 0.55\ (10,000) = 5,500$(원)

이다.

(예 III - 2)

 이 예는 위의 (예 III - 1)에서 표준편차가 50개로 늘어나는 경우 최적주문량, 기대이익, 그리고 단위당 순이익을 찾는 예이다. cv = 0.5, r_3 = 0.3에 대응하는 <표 III - 2>에서 q =1.31이며, u = 0.42임으로

$Q^* = 100(1.31) = 131$(개)
$E(P) = 0.42(131)(10,000) = 550,200$(원)

이고, 단위당 순이익은

$u = 0.42(10,000) = 4,200$(원)

이다. 즉 수요변동이 심할수록 주문량이 늘어나게 되며, 순이익은 감소함을 알 수 있다. 또한 이 예에서 단위당 7400원의 이익을 얻기 위한 할인가격 P_2를 결정한다면 r_1= 1.8, u = 0.74에 대응하는 r_2는 r_2 = 0.8 임으로 $r_2 = P_2/C$ 에서 P_2 = 8,000원으로 결정해야 함을 알 수 있다.

<표 III - 1> 최적주문량의 비율(q)와 단위당 수익률(u), (cv = 0.3, r_3 = 0.3)

최적주문량의 비율(q)

r_2 \ r_1	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.4	3
0.1	0.80	0.89	0.95	1.00	1.04	1.07	1.12	1.17
0.2	0.83	0.91	0.97	1.02	1.06	1.09	1.14	1.19
0.3	0.84	0.94	1.00	1.05	1.08	1.12	1.16	1.22
0.4	0.87	0.97	1.03	1.08	1.11	1.14	1.19	1.25
0.5	0.90	1.00	1.06	1.11	1.15	1.18	1.22	1.28
0.6	0.95	1.04	1.10	1.15	1.19	1.22	1.26	1.31
0.7	1.00	1.10	1.16	1.20	1.24	1.27	1.31	1.36
0.8	1.08	1.17	1.23	1.27	1.31	1.33	1.38	1.42
0.9	1.20	1.29	1.35	1.38	1.41	1.44	1.48	1.52

단위당 수익률(u)

r_2 \ r_1	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.4	3
0.1	0.02	0.11	0.22	0.38	0.54	0.70	0.99	1.43
0.2	0.03	0.12	0.23	0.39	0.54	0.70	0.99	1.44
0.3	0.04	0.13	0.23	0.39	0.55	0.71	1.00	1.45
0.4	0.05	0.14	0.24	0.40	0.55	0.72	1.01	1.46
0.5	0.06	1.15	0.24	0.40	0.55	0.74	1.02	1.48
0.6	0.07	1.16	0.25	0.40	0.55	0.75	1.02	1.49
0.7	0.08	1.17	0.26	0.41	0.56	0.76	1.03	1.50
0.8	0.09	1.18	0.26	0.41	0.56	0.78	1.04	1.51
0.9	1.10	1.19	0.27	0.42	0.56	0.79	1.05	1.52

<표 III - 2> 최적주문량의 비율(q)와 단위당 수익률(u), (cv = 0.5, r_3 = 0.3)

최적주문량의 비율(q)

r_2 \ r_1	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.4	3
0.1	0.66	0.82	0.92	1.00	1.06	1.11	1.20	1.29
0.2	0.71	0.85	0.96	1.04	1.10	1.15	1.23	1.32
0.3	0.74	0.89	1.00	1.08	1.14	1.19	1.27	1.36
0.4	0.78	0.94	1.05	1.13	1.19	1.24	1.32	1.41
0.5	0.84	1.00	1.11	1.18	1.24	1.29	1.37	1.46
0.6	0.91	1.07	1.17	1.25	1.31	1.36	1.44	1.52
0.7	1.00	1.16	1.26	1.34	1.40	1.44	1.52	1.60
0.8	1.13	1.28	1.38	1.45	1.51	1.56	1.63	1.70
0.9	1.34	1.48	1.58	1.64	1.69	1.73	1.80	1.87

단위당 수익률(u)

r_2 \ r_1	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.4	3
0.1	0.01	0.06	0.11	0.24	0.38	0.51	0.77	1.13
0.2	0.01	0.06	0.11	0.25	0.39	0.52	0.77	1.13
0.3	0.01	0.07	0.12	0.26	0.40	0.53	0.78	1.13
0.4	0.02	0.07	0.14	0.28	0.41	0.53	0.78	1.14
0.5	0.02	0.08	0.15	0.29	0.42	0.54	0.78	1.14
0.6	0.03	0.08	0.16	0.30	0.42	0.54	0.78	1.15
0.7	0.03	0.09	0.18	0.31	0.43	0.55	0.79	1.15
0.8	0.04	0.09	0.19	0.31	0.43	0.55	0.79	1.15
0.9	0.04	0.10	0.20	0.31	0.44	0.56	0.79	1.16

IV. 결론

본 연구는 유효기간이 명시되어 있는 제품을 대상으로 최적 주문량과 이익, 그리고 단위당 수익률을 분석하는 것을 기본적인 목적으로 하고 있다. II 장에서 최대이익을 목적으로 하는 최적주문량의 결정을 위한 모형을 수립하여 제시하고 있고, III 장을 통해 수익률과 변수들의 영향을 분석, 제시하고 있다. 또한 목표이익에 대응하는 할인가격 분석도 계산 예들을 통해 제시하고 있다.

본 연구의 특징은 판매가격의 자료들을 이용함으로써 최대이익과 최적주문량을 효과적으로 결정하고, 나아가 적정 할인가격을 책정하기 위한 문제를 해결하고 있다. 그리고 할인된 판매가격과 신용상실을 고려함으로써 실제 상황에 보다 효과적으로 사용될 수 있는 방법을 제시하고 있다.

참고문헌

[1] Freund, E. John, "Mathematical Statistics", Prentice Hall, 6th Edition, pp. 216-222, 1999.

[2] Hines, William ; Montgomery, Douglas, "Probability and Statistics in Engineering and Management Sciences", John Wiley & sons. pp. 194-209, 1990.

[3] Johnson, Lynwood ; Montgomery Douglas, "Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control", John Wiley & sons. pp. 45-49, 1974.

[4] Smith, B. Spencer, "Compuer Based Production and Inventory Control", Prentice Hall, pp. 109-158, 1989.

[5] Tersine, J. Richard, "Principles of Inventory and Materials Management", North-Halland, pp. 300-315.

(abstract)

An Optimal Order Quantity and Profit Ratio Model for an Item with the Valid Time

Yoon, Seung Chul
Goh, Dong Su

The study analyzes an optimal order quantity and profit ratio for an item with a valid time period. Traditionally, most of researches have suggested those methods to determine optimal order quantities in terms of minimum costs.

However, it is hard to estimate the correct order quantity under the situation that the cost can not be figured out exactly. Considering the problem, this research has suggested a method to decide the optimal order quantity using sales prices, that is, shelf life prices and discounted prices.

Also the study has presented useful tables and examples to help fast decisions about optimal order quantities and corresponding expected profits to cope with price changes.