

DEA 효율성 및 Malmquist 생산성 변화지수

유상열

2011. 12.

단국대학교 미래산업연구소

1. DEA 효율성

DEA에서 효율성 측정 대상을 의사결정 단위(decision making unit, DMU)라고 함
DMU는 다수의 투입물로 다수의 산출물을 생산하며 유사한 생산함수를 가짐

투입물 벡터 $X^j = (x_1^j, \dots, x_m^j, \dots, x_M^j) \geq 0$

산출물 벡터 $Y^j = (y_1^j, \dots, y_n^j, \dots, y_N^j) \geq 0$ 로 생산가능집합 구성

1) 투입기준 CCR 모형

$$\theta_{CCR}^{k*} = \min \theta_{CCR}^k$$

$$\text{s.t. } \theta_{CCR}^k x_m^k \geq \sum_{j=1}^J x_m^j \lambda^j, \quad m=1, 2, \dots, M$$

$$y_n^k \leq \sum_{j=1}^J y_n^j \lambda^j, \quad n=1, 2, \dots, N$$

$$\theta, \lambda^j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, J$$

m: 투입물 수, n: 산출물 수,
j: DMU 수

$$\text{Max} \left(\sum_{m=1}^M s_m^- + \sum_{n=1}^N s_n^+ \right)$$

$$\text{s.t. } \theta_{CCR}^k x_m^k = \sum_{j=1}^J x_m^j \lambda^j + s_m^-,$$

$$m=1, 2, \dots, M$$

$$y_n^k = \sum_{j=1}^J y_n^j \lambda^j - s_n^+, \quad n=1, 2, \dots, N$$

$$\theta, \lambda^j, s_m^-, s_n^+ \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, J$$

m: 투입물 수, n: 산출물 수,
j: DMU 수

s_m^- : 투입물 여유분, s_n^+ : 산출물 여유분

2) 산출기준 CCR 모형

$$\theta_{CCR}^{k*} = \max \theta_{CCR}^k$$

$$\text{s.t. } x_m^k \geq \sum_{j=1}^J x_m^j \lambda^j, \quad m=1, 2, \dots, M$$

$$\theta_{CCR}^k y_n^k \leq \sum_{j=1}^J y_n^j \lambda^j, \quad n=1, 2, \dots, N$$

$$\theta, \lambda^j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, J$$

m: 투입물 수, n: 산출물 수,
j: DMU 수

$$\text{Max} \left(\sum_{m=1}^M s_m^- + \sum_{n=1}^N s_n^+ \right)$$

$$\text{s.t. } x_m^k = \sum_{j=1}^J x_m^j \lambda^j + s_m^-, \quad m=1, 2, \dots, M$$

$$\theta_{CCR}^k y_n^k = \sum_{j=1}^J y_n^j \lambda^j - s_n^+, \quad n=1, 2, \dots, N$$

$$\theta, \lambda^j, s_m^-, s_n^+ \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, J$$

m: 투입물 수, n: 산출물 수,
j: DMU 수

s_m^- : 투입물 여유분, s_n^+ : 산출물 여유분

3) BCC 모형

BCC 모형은 CCR 모형의 제약조건에 $\sum_{j=1}^J \lambda^j = 1$ 을 추가

-> 가변규모수익(variable return to scale)을 가정

$$k\text{번째 DMU의 규모효율성} = \frac{\theta_{CCR}^{k*}}{\theta_{BCC}^{k*}}$$

4) 투입기준 맘퀴스트 생산성 변화지수

$$M^t = \frac{D_{CCR}^t(x^t, y^t)}{D_{CCR}^t(x^{t+1}, y^{t+1})}$$

$$M^{t+1} = \frac{D_{CCR}^{t+1}(x^t, y^t)}{D_{CCR}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}$$

$$M^{t,t+1} = \left(\frac{D_{CCR}^t(x^t, y^t)}{D_{CCR}^t(x^{t+1}, y^{t+1})} \times \frac{D_{CCR}^{t+1}(x^t, y^t)}{D_{CCR}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M^{t,t+1} = \frac{D_{CCR}^t(x^t, y^t)}{D_{CCR}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \times \left(\frac{D_{CCR}^{t+1}(x^t, y^t)}{D_{CCR}^t(x^t, y^t)} \times \frac{D_{CCR}^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_{CCR}^t(x^{t+1}, y^{t+1})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

= 효율성 변화율 × 기술변화율

5) 효율성 및 생산성변화지수의 원인변수 검정

효율성 추정치에 자연대수를 취한 값과 원인변수를 이용하여 회귀분석을 실시
Banker and Natarajan(2008)은 효율성 추정치를 대상으로 OLS 회귀분석을 실시하는
경우 통계적으로 일치추정치(consistent estimates)를 제공한다는 것을 증명

2. 회계법인 효율성

-> 회계법인 효율성(θ_{BCC}^{k*}), 효율성에 영향을 미치는 요인, 회계개혁입법이 효율성에 미치는 영향 분석

1) 회계법인별 효율성측정치 및 상황변수에 대한 기술통계량

회계법인 구분	변수	평균	표준편차	25%	50%	75%
전체 회계법인 (N=813)	θ_{BCC}^{k*}	0.6571	0.1675	0.5369	0.6229	0.7535
	AUDP	36.29%	16.51%	24.75%	34.15%	46.03%
	TAXP	18.54%	12.49%	11.54%	16.33%	21.47%
	MASP	45.18%	17.62%	33.66%	46.81%	55.68%
	HERFINDEX	0.4439	0.1006	0.3809	0.4101	0.4639
	POWNER	53.12%	26.59%	30.00%	50.00%	76.47%
	DERATIO	173.33%	114.56%	95.30%	147.53%	220.06%
	QRATIO	164.25%	108.74%	114.51%	138.62%	177.82%
	LNOFFICE	0.7879	0.5812	0	0.6931	1.0986
Big4 회계법인 (N=61)	θ_{BCC}^{k*}	0.8984	0.1141	0.8245	0.9525	1.0000
	AUD%	48.93%	13.83%	38.09%	46.46%	54.26%
	TAX%	12.39%	6.31%	5.88%	13.93%	16.88%
	MAS%	38.68%	14.61%	31.52%	38.71%	47.41%
	ERFINDEX	0.4481	0.0913	0.3808	0.4142	0.4931
	OWNER%	12.83%	5.08%	9.22%	11.26%	14.79%
	DERATIO	260.31%	132.49%	174.91%	216.20%	331.01%
	QRATIO	141.52%	30.63%	122.70%	137.18%	156.20%
	LNOFFICE	1.4046	0.4817	1.3863	1.3863	1.7918

회계법인 구분	변수	평균	표준편차	25%	50%	75%
기존 회계법인 (N=43)	θ_{BCC}^{k*}	0.7450	0.1369	0.6399	0.7275	0.8532
	AUD%	60.50%	17.80%	47.96%	63.45%	73.01%
	TAX%	12.13%	5.36%	7.92%	13.05%	15.26%
	MAS%	27.37%	19.31%	18.66%	22.78%	35.92%
	HERFINDEX	0.5259	0.1278	0.4085	0.4970	0.5997
	OWNER%	27.22%	8.35%	20.56%	28.13%	34.62%
	DERATIO	264.29%	90.44%	207.55%	260.48%	310.94%
	QRATIO	122.72%	32.80%	104.57%	110.82%	126.13%
	LNOFFICE	1.5630	0.6890	0.6931	1.9459	2.0794
신설 회계법인 (N=709)	θ_{BCC}^{k*}	0.6310	0.1542	0.5258	0.6026	0.7163
	AUD%	33.73%	14.88%	23.91%	31.99%	42.00%
	TAX%	19.45%	12.93%	11.95%	16.94%	22.77%
	MAS%	46.82%	17.03%	36.32%	47.93%	56.43%
	HERFINDEX	0.4386	0.0974	0.3802	0.4069	0.4561
	OWNER%	58.15%	24.47%	38.10%	56.52%	78.95%
	DERATIO	160.33%	108.42%	88.55%	137.17%	206.62%
	QRATIO	168.73%	115.11%	115.23%	142.62%	184.46%
	LNOFFICE	0.6878	0.5102	0	0.6931	1.0986

θ_{BCC}^{k*} =효율성 측정치, AUD%=회계감사수익비율, TAX%=세무서비스수익비율
 MAS%=경영자문 및 기타수익비율, HERFINDEX=서비스집중도,
 OWNER%=총소속공인회계사 중 사원의 비율, DERATIO=부채자본비율
 QRATIO=당좌비율, LNOFFICE=분사무소 수의 자연로그 값

2) 회계개혁입법 이전과 이후의 회계법인 그룹별 효율성측정치 평균차이

구분	전체기간 평균	기간별 평균		기간별 평균차이 검증	
		회계개혁입법 이전 (1997-2002)	회계개혁입법 이후 (2003-2009)	t-검증 p값	Wilcoxon 순위합검증 p값
Big4 회계법인	0.8984	0.8722	0.9273	0.0547	0.0886
기존회계법인	0.7450	0.7957	0.6919	0.0112	0.0097
신설회계법인	0.6310	0.5880	0.6432	<.0001	<.0001
전체회계법인	0.6571	0.6528	0.6586	0.6893	0.2444

3) 회귀분석

$$\ln \hat{\theta}_{jt} = \beta_0 + \beta_1 * REFORM_{jt} + \beta_2 * BIG4_{jt} + \beta_3 * OLD_{jt} + \beta_4 * TAX\%_{jt} \\ + \beta_5 * MAS\%_{jt} + \beta_6 * HERFINDEX_{jt} + \beta_7 * OWNER\%_{jt} \\ + \beta_8 * DERATIO_{jt} + \beta_9 * QRATIO_{jt} + \beta_{10} * LNOFFICE_{jt} + \epsilon_{it}$$

	회귀계수	예상부호	추정치	t-값
절편	β_0	?	0.9084***	16.53
REFORM	β_1	?	0.0741***	4.53
BIG4	β_2	+	0.2929***	9.13)
OLD	β_3	+	-0.0004	-0.01
TAX%	β_4	?	0.0036***	5.30
MAS%	β_5	?	-0.0031***	-6.31
HERFINDEX	β_6	+	1.0826***	13.57
OWNER%	β_7	?	0.0016***	5.14
DERATIO	β_8	-	0.0001	0.77
QRATIO	β_9	+	0.0002**	2.28
LNOFFICE	β_{10}	+	0.0279**	1.99
p(model)			<.0001	
수정 R2			0.4166	

***, **, *: 각각 최소 1%, 5%, 10% 수준에서 유의함. 괄호 안의 숫자는 t 값임.

3. 화력발전회사의 연료 및 노동 효율성

-> 한국전력에서 분할된 국내 5개 화력발전회사의 연료 및 노동효율성 분석

1) 기술통계량 (2003년-2010년, 8년, $n=40$)

변수			단위	평균	표준편차	25%	50%	75%
산출물	전력판매량(Y)		Gwh	43,221	7,587	36,592	43,392	48,671
투입물	원료	석탄(X_1)	1,000ton	11,799	3,458	8,998	11,113	13,878
		유류(X_2)	중유	1,000kl	681	411	365	546
			경유	1,000kl	20	3	5	9
		LNG(X_3)	1,000ton	1,274	675	722	1,184	1,542
	노동력(X_4)		생산직 종업원 수	1,552	168	1,432	1,538	1,659

2) 투입기준 θ_{CCR}^{k*}

DMU	θ_{CCR}^{k*}	참조횟수	참조집합(λ^{j*})	여유분(s_m^-, s_n^+)				
				X_1	X_2	X_3	X_4	Y
SE_{03}	0.745	–	$SE_{09}(0.084), S_{03}(0.104),$ $S_{08}(0.124), W_{10}(0.299)$	–	–	–	–	–
SE_{04}	0.775	–	$SE_{10}(0.084), S_{10}(0.051),$ $W_{10}(0.537)$	–	81,546	–	–	–
SE_{06}	0.837	–	$SE_{09}(0.31), S_{03}(0.053),$ $S_{08}(0.134), W_{10}(0.284)$	–	–	–	–	–
SE_{08}	1.000	1	$SE_{08}(1)$	–	–	–	–	–
SE_{09}	1.000	6	$SE_{09}(1)$	–	–	–	–	–
SE_{10}	1.000	7	$SE_{10}(1)$	–	–	–	–	–
중간 생략								
S_{07}	1.000	15	$S_{07}(1)$	–	–	–	–	–
S_{08}	1.000	14	$S_{08}(1)$	–	–	–	–	–
S_{09}	0.976	–	$SE_{10}(0.023), S_{08}(0.291),$ $S_{10}(0.274), W_{10}(0.414)$	–	–	–	–	–
S_{10}	1.000	14	$S_{10}(1)$	–	–	–	–	–
EW_{03}	0.797	–	$S_{03}(0.468), S_{07}(0.299)$	–	930,281	–	91	–
M_{09}	0.738	–	$SE_{09}(0.083), S_{03}(0.025),$ $S_{08}(0.69), W_{10}(0.089)$	–	–	–	–	–
M_{10}	0.893	–	$SE_{10}(0.245), S_{08}(0.753),$ $S_{10}(0.037)$	–	–	891,082	–	–

3) 투입기준 θ_{BCC}^{k*}

DMU	θ_{BCC}^{k*}	참조 횟수	참조집합(λ^{j*})	여유분(s_m^-, s_n^+)				
				X_1	X_2	X_3	X_4	Y
SE_{03}	1.000	10	$SE_{03}(1)$	-	-	-	-	-
SE_{04}	0.993	-	$SE_{03}(0.697), W_{03}(0.077),$ $W_{10}(0.227)$	1,242,849	100,898	-	-	-
SE_{05}	0.957	-	$SE_{03}(0.498), SE_{09}(0.064),$ $SE_{10}(0.247), S_{03}(0.116),$ $S_{06}(0.074)$	-	-	-	-	-
S_{06}	1.000	11	$S_{06}(1)$	-	-	-	-	-
S_{07}	1.000	2	$S_{07}(1)$	-	-	-	-	-
S_{10}	1.000	9	$S_{10}(1)$	-	-	-	-	-
중간 생략								
M_{05}	0.922	-	$S_{03}(0.373), S_{06}(0.627)$	-	-	532,156	109	6,974,475
M_{06}	0.917	-	$S_{03}(0.266), S_{06}(0.734)$	-	-	516,242	217	6,678,243
M_{07}	0.892	-	$S_{06}(0.807), S_{08}(0.193)$	-	-	394,699	174	7,294,929
M_{08}	0.801	-	$S_{03}(0.085), S_{06}(0.3),$ $S_{08}(0.615)$	-	-	-	18	6,141,659
M_{09}	0.791	-	$SE_{03}(0.26), SE_{08}(0.044),$ $SE_{10}(0.005), S_{08}(0.692)$	251,298	-	-	-	-
M_{10}	1.000	1	$M_{10}(1)$	-	-	-	-	-

4) 여유분 요약

Co.	CCR 모형(s_m^-, s_n^+)				
	X_1	X_2	X_3	X_4	Y
<i>SE</i>	–	81,546	–	–	–
<i>S</i>	–	86,086	–	–	–
<i>EW</i>	1,627,992	3,474,675	1,372,885	259	–
<i>W</i>	–	2,716,266	1,161,521	–	–
<i>M</i>	–	211,974	1,227,592	309	–
Total	1,627,992	6,570,547	3,761,998	568	–

Co.	BCC 모형(s_m^-, s_n^+)				
	X_1	X_2	X_3	X_4	Y
<i>SE</i>	1,242,849	100,898	–	–	–
<i>S</i>	–	–	–	24	–
<i>EW</i>	2,305,045	892,593	1,677,592	576	10,144,829
<i>W</i>	–	123,598	2,215,074	76	983,648
<i>M</i>	251,298	–	1,991,340	592	43,070,688
Total	3,799,192	1,117,089	5,884,006	1,268	54,199,165

5) 규모 효율성

DMU	규모 효율성.	$\sum \lambda_j^*$	규모수익	DMU	규모 효율성.	$\sum \lambda_j^*$	규모수익
SE_{03}	0.745	0.610	IRS	EW_{07}	0.967	0.936	IRS
SE_{04}	0.780	0.672	IRS	EW_{08}	0.951	0.907	IRS
SE_{05}	0.875	0.783	IRS	EW_{09}	0.947	0.909	IRS
중간생략							
S_{09}	1.000	1.000	CRS	M_{05}	0.751	0.721	IRS
S_{10}	1.000	1.000	CRS	M_{06}	0.776	0.747	IRS
EW_{03}	0.798	0.768	IRS	M_{07}	0.817	0.797	IRS
EW_{04}	0.813	0.770	IRS	M_{08}	0.865	0.857	IRS
EW_{05}	0.819	0.781	IRS	M_{09}	0.933	0.888	IRS
EW_{06}	0.949	0.908	IRS	M_{10}	0.893	1.036	DRS

6) Bootstrap 효율성 추정

$$\Pr(-\hat{b}_\alpha \leq [\hat{\theta}^k - \theta^k] \leq -\hat{a}_\alpha) \approx 1 - \alpha$$

θ^{k*} 가 $1-\alpha$ 의 확률로 존재할 신뢰구간: $[\hat{\theta}^k + \hat{a}_\alpha] \leq \theta^k \leq [\hat{\theta}^k + \hat{b}_\alpha]$

DMU	θ_{CCR}^{k*}	신뢰구간			
		5%	95%	2.5%	97.5%
SE_{03}	0.745	0.745	0.869	0.745	0.909
SE_{04}	0.775	0.775	0.923	0.775	0.943
SE_{05}	0.837	0.837	0.971	0.837	0.994
S_{09}	0.976	0.976	1.008	0.976	1.018
S_{10}	1.000	1.000	1.121	1.000	1.121
중간생략					
EW_{03}	0.797	0.797	0.968	0.797	0.990
EW_{04}	0.785	0.785	0.883	0.785	0.890
M_{09}	0.738	0.738	1.000	0.738	1.006
M_{10}	0.893	0.893	1.137	0.893	1.365

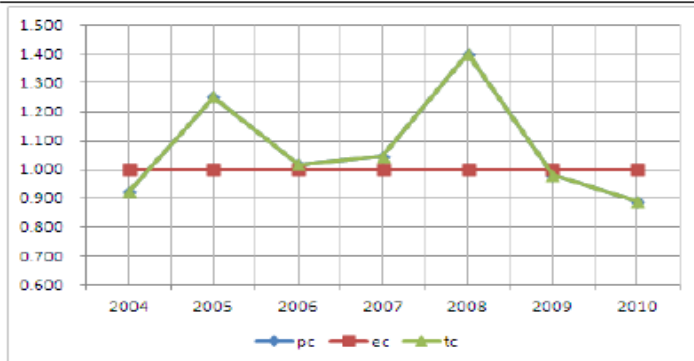
θ_{BCC}^{k*}	신뢰구간			
	5%	95%	2.5%	97.5%
1.000	1.151	1.343	1.131	1.343
0.993	1.107	1.291	1.061	1.291
0.957	1.030	1.195	1.006	1.195
0.976	0.990	1.025	0.976	1.025
1.000	0.892	1.000	0.884	1.000
중간생략				
0.999	1.031	1.254	1.010	1.254
0.965	1.124	1.275	1.118	1.275
0.791	1.013	1.355	1.000	1.355
1.000	0.878	1.120	0.733	1.120

7) Malmquist 생산성변화지수

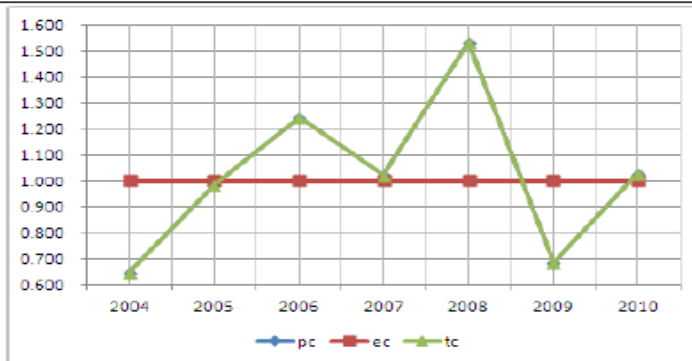
DMU	지수	연간 변화율						
		2003 -2004	2004 -2005	2005 -2006	2006 -2007	2007 -2008	2008 -2009	2009 -2010
<i>SE</i>	<i>PC</i>	0.922	1.252	1.018	1.045	1.401	0.979	0.889
	<i>EC</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>TC</i>	0.922	1.252	1.018	1.045	1.401	0.979	0.889
<i>EW</i>	<i>PC</i>	0.950	0.941	1.035	0.968	1.017	1.062	1.036
	<i>EC</i>	1.041	0.930	1.082	0.964	0.994	0.993	0.936
	<i>TC</i>	0.912	1.011	0.957	1.005	1.023	1.070	1.108
중간 생략								
<i>M</i>	<i>PC</i>	1.290	1.037	1.050	1.156	1.050	1.028	1.170
	<i>EC</i>	1.267	1.000	0.741	1.104	0.880	1.389	1.000
	<i>TC</i>	1.018	1.037	1.416	1.048	1.193	0.740	1.170

Malmquist 생산성변화지수

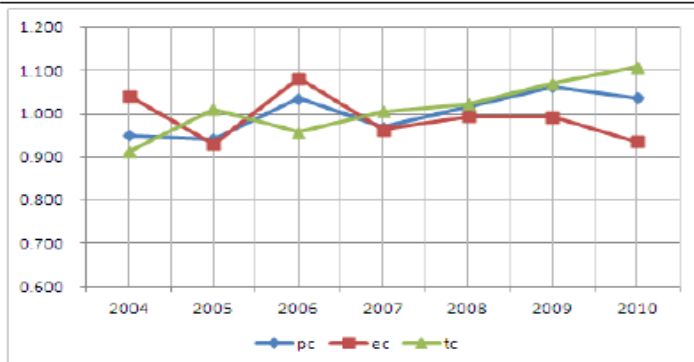
SE



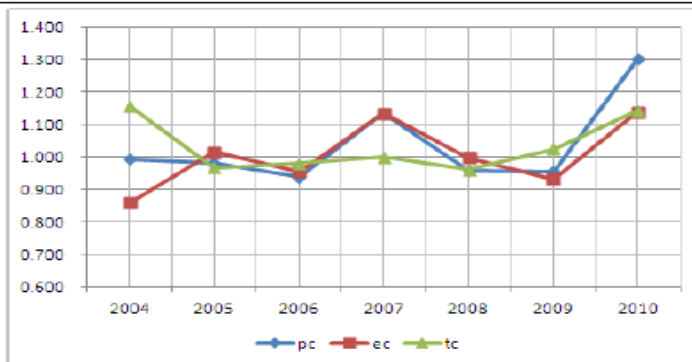
S



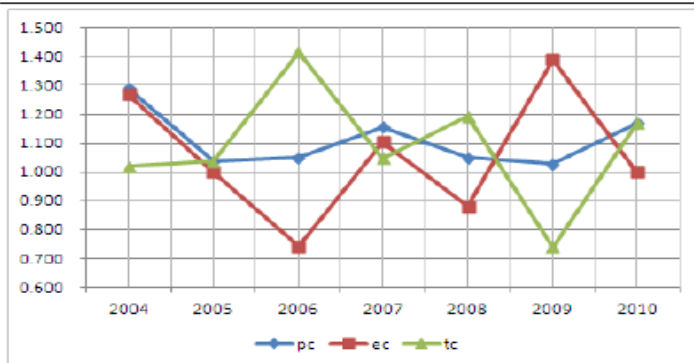
EW



W



M



전제

